ANALISI MATEMATICA 1

Commissione F. Albertini, V. Casarino e M. Motta

Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 12 settembre 2013

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x)=\frac{\log(1+x^2)}{x}-2\arctan(x)$$

(a) Determinare il dominio ed eventuali simmetrie di f; non è richiesto lo studio del segno di f;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f. Calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) studiare convessità, concavità e determinare eventuali punti di flesso di f;

(e) disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 (a) Scrivere lo sviluppo di Mac-Laurin in 0^+ fino al grado 3 della funzione

$$g(x)=e^{-x}-\cos(\sqrt{2x}).$$

(b) Calcolare al variare del parametro reale a il limite

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{-1/n}-\cos(\sqrt{2/n})+\frac{a}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1}$$

Esercizio 3 (a) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{2\pi}x^2|\sin x|\,dx.$$

(b) Scrivere in forma esplicita la funzione integrale $F(x)=\int_0^x t^2|\sin t|\,dt$ per $x\in[0,2\pi]$.

Esercizio 4 Discutere la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sin\left(\frac{1}{n^a}\right)\right),\qquad a\geq 1/2\,.$$

Tempo: due ore e mezza. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

ANALISI MATEMATICA 1

Commissione F. Albertini, V. Casarino e M. Motta

Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 12 settembre 2013

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{\log(1+x^2)}{x} - 2\arctan(x)$$

(a) Determinare il dominio ed eventuali simmetrie di f; non è richiesto lo studio del segno di f;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f. Calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) studiare convessità, concavità e determinare eventuali punti di flesso di f;

(e) disegnare un grafico qualitativo di f.

Sol. (a) $Dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e f è dispari. Possiamo quindi in seguito limitare lo studio a $x > 0$.

(b) Usando lo sviluppo del logaritmo, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}[\frac{x^2}{x} - 2\arctan(x)] = 0$. Quindi (tenendo anche conto della simmetria) f si prolunga per continuità in $x = 0$ ponendo $f(0) = 0$. Per la gerarchia degli infiniti, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 - 2\pi/2 = -\pi$. Quindi $y = -\pi$ è un asintoto orizzontale a $+\infty$ (e $y = \pi$ è un asintoto orizzontale a $-\infty$).

(c) Per $x \neq 0$, f è derivabile e vale

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\log(1+x^2) + \frac{1}{x}\frac{2x}{1+x^2} - \frac{2}{1+x^2} = -\frac{\log(1+x^2)}{x^2}.$$

Quindi $f'(x) < 0$ per ogni $x > 0$ e quindi f è strettamente decrescente. Per simmetria, lo è anche per $x < 0$. Perciò f non ha max e min relativi o assoluti ma solo $\inf f = -\pi$ e $\sup f = +\pi$. Attacco in $x = 0^\pm$: usando lo sviluppo del logaritmo, , $\lim_{x\to 0^\pm} f'(x) = -\lim_{x\to 0^\pm} \frac{x^2}{x^2} = -1$. Quindi f è derivabile in $x = 0$ con $f'(0) = -1$.

(d) Per $x \neq 0$, f è derivabile due volte e vale

$$f''(x) = \frac{2}{x^3(1+x^2)}\left[(1+x^2)\log(1+x^2) - x^2\right].$$

Per $x > 0$ $f''(x) > 0$ se e solo se $\log(1+x^2) > \frac{x^2}{1+x^2}$ e questo è sempre vero, per es. per confronto dei grafici di $y = \log(1+x^2)$ e $y = \frac{x^2}{1+x^2}$. Quindi per $x > 0$ f è convessa mentre per $x < 0$ è concava. In $x = 0$ c'è un punto di flesso. La funzione è derivabile due volte anche in $x = 0$, perchè usando lo sviluppo del logaritmo e l'asintoticità $1 + x^2 \sim 1$, si ottiene che

$$\lim_{x\to 0^\pm} f''(x) = -\lim_{x\to 0^\pm}\frac{2}{x^3}\left[(1+x^2)(x^2 - \frac{1}{2}x^4) - x^2 + o(x^4)\right] = -\lim_{x\to 0^\pm}\frac{x^4}{x^3} = 0.$$

Esercizio 2 (a) Scrivere lo sviluppo di Mac-Laurin in 0^+ fino al grado 3 della funzione

$$g(x) = e^{-x} - \cos(\sqrt{2x}).$$

(b) Calcolare al variare del parametro reale a il limite

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{-1/n} - \cos(\sqrt{2/n}) + \frac{a}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} - 1}$$

Sol. (a) Usando gli sviluppi di esponenziale e coseno in $x = 0$ si ottiene:

$$g(x) = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 - \left[1 - x + \frac{1}{24}(4x^2) - \frac{1}{6!}(8x^3)\right] + o(x^3) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{7}{45}x^3 + o(x^3).$$

(b) Usando il punto (a) e lo sviluppo di $\sqrt{1+x}$:

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{3}\frac{1}{n^2} - \frac{7}{45}\frac{1}{n^3} + \frac{a}{n^2}}{\frac{1}{2n^2}} = 2 \lim_{n\to+\infty} \left[\left(\frac{1}{3} + a\right) - \frac{7}{45n}\right] = 2\left(\frac{1}{3} + a\right).$$

Esercizio 3 (a) Calcolare il seguente integrale:

$$\int_0^{2\pi} x^2 |\sin x|\, dx$$

(b) scrivere in forma esplicita la funzione integrale $F(x) = \int_0^x t^2 |\sin t|\, dt$ per $x \in [0, 2\pi]$.

Sol. Essendo $|\sin x| = \sin x$ per $x \in [0, \pi]$ e $|\sin x| = -\sin x$ per $x \in [\pi, 2\pi]$, l'integrale diventa

$$I = \int_0^{2\pi} x^2 |\sin x|\, dx = \int_0^{\pi} x^2 \sin x\, dx - \int_{\pi}^{2\pi} x^2 \sin x\, dx.$$

Poichè, integrando per parti in modo indefinito, si ha che

$$\int x^2 \sin x\, dx = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + cost,$$

si ottiene

$$I = [-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x]_0^{\pi} - [-x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x]_{\pi}^{2\pi} = 6\pi^2 - 8.$$

Facoltativo: per definizione:

$$F(x) = \begin{cases} \int_0^x t^2 \sin t\, dt = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x - 2 & \text{se } \ x \in [0, \pi] \\ \int_0^{\pi} t^2 \sin t\, dt - \int_{\pi}^x t^2 \sin t\, dt = 2\pi^2 - 6 + x^2 \cos x - 2x \sin x - 2\cos x & \text{se } \ x \in]\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

Esercizio 4 Discutere la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sin\left(\frac{1}{n^a}\right)\right), \qquad a\geq 1/2\,.$$

Sol. Per lo studio della convergenza assoluta, osserviamo che per ogni $a>1/2$, $a_n \doteq \frac{1}{\sqrt{n}}-\sin\left(\frac{1}{n^a}\right)\sim\frac{1}{\sqrt{n}}$ per la gerarchia degli infinitesimi. Quindi $a_n>0$ per n grande e la serie non converge assolutamente per il criterio del confronto asintotico con $1/n^\alpha$ con $\alpha=1/2<1$. Per $a=1/2$, dallo sviluppo del seno segue che $a_n\sim\frac{1}{6n^{3/2}}$ (>0) e quindi la serie converge assolutamente.

Per la convergenza semplice, per $a=1/2$, segue da quella assoluta. Per $a>1/2$, la serie non converge assolutamente ma è infinitesima. Quindi per il Criterio delle serie alternate (o di Leibnitz), la serie converge se a_n è decrescente. Per dimostrare questo, poniamo $f(x)\doteq\frac{1}{\sqrt{x}}-\sin\left(\frac{1}{x^a}\right)$ e deriviamo:

$$f'(x)=-\frac{1}{2\,x^{3/2}}+\cos\left(\frac{1}{x^a}\right)\left(\frac{a}{x^{a+1}}\right).$$

Dalla gerarchia degli infinitesimi, poichè $a>1/2$, segue che per x sufficientemente grande:

$$f'(x)=-\frac{1}{2\,x^{3/2}}+o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)\sim-\frac{1}{2\,x^{3/2}}<0.$$

Quindi a_n è anche infinitesima e la serie converge anche per $a>1/2$.

Tempo: due ore e mezza. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

ANALISI MATEMATICA 1

Commissione F. Albertini, V. Casarino e M. Motta

Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 3 Luglio 2013

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \cosh^3 x - 9\cosh^2 x + 24\cosh x - 18$$

(a) Determinare il dominio ed eventuali simmetrie di f; non è richiesto lo studio del segno di f;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f. Calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) disegnare un grafico qualitativo di f (non è richiesto lo studio di f'').

Domanda facoltativa: Determinare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = \lambda$, al variare di λ nell'intervallo $[0, 3]$.

Svolgimento. (a) $Dom(f) = \mathbb{R}$, f è pari e quindi possiamo limitarci a studiarla per $x \geq 0$.

(b) Usando la definizione di cosh e le asintoticità a $+\infty$, si ha che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{3x}}{8} = +\infty$$

e non esiste asintoto obliquo visto che f ha crescita superlineare a $+\infty$. Inoltre f è continua in $\mathbb{R}$ e $f(0) = -2$.

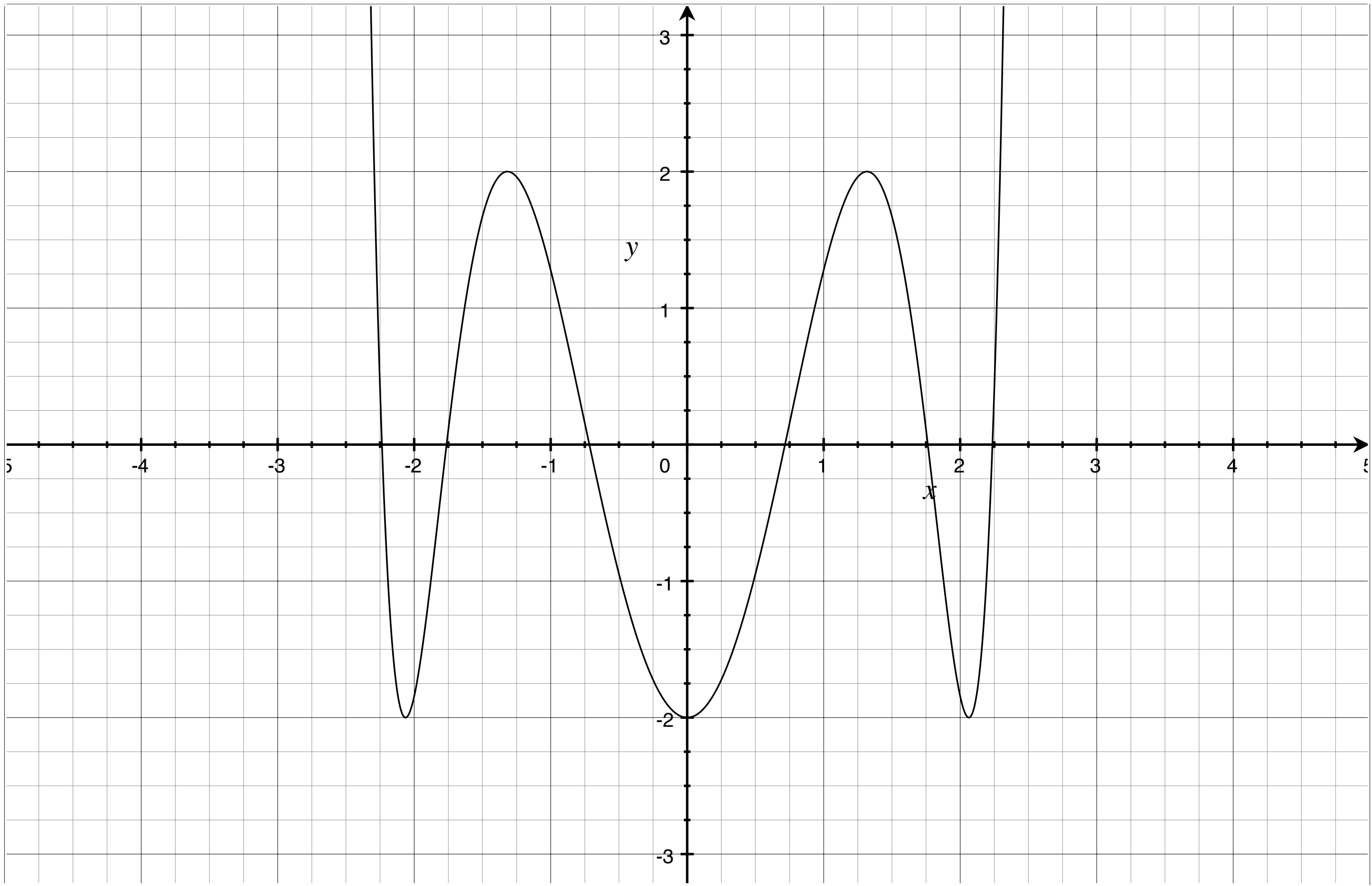
(c) f è derivabile infinite volte in $\mathbb{R}$ e

$$f'(x) = \sinh x \left(3\cosh^2 x - 18\cosh x + 24\right)$$

Per $x \geq 0$, $\sinh x \geq 0$ quindi basta studiare il segno dell'espressione tra parentesi. Poniamo $t = \cosh x$:

$$3\cosh^2 x - 18\cosh x + 24 = 3(t^2 - 6t + 8) \geq 0$$

se e solo se $t = \cosh x \leq 2$ oppure $t = \cosh x \geq 4$. Quindi otteniamo che $f'(x) \geq 0$, e quindi f è crescente, per $x \geq 0$ se e solo se $x \in [0, \operatorname{sett}\cosh 2] \cup [\operatorname{sett}\cosh 4, +\infty[$. In $\mathbb{R}$, i punti 0, $\pm\operatorname{sett}\cosh 4$ risultano di minimo relativo, mentre $\pm\operatorname{sett}\cosh 2$ sono di massimo relativo. Non esiste massimo assoluto, perchè $\sup f = +\infty$, mentre esiste il minimo assoluto che viene assunto in tutti i punti 0, $\pm\operatorname{sett}\cosh 4$ e vale -2. Non ci sono limiti di f' significativi.


y
x
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
3
2
1
-1
-2
-3

Esercizio 2 Calcolare al variare del parametro $a > 0$ il limite

$$L = \lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(x + x^3) - x + \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right) x^5}{x^a \log x + 2^x - 1 - \log 2 \, \sin x}\,.$$

Svolgimento. Grazie agli sviluppi di Mac Laurin, $\arctan(x+x^3) = (x+x^3) - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$, mentre $\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right) x^5 = o(x^3)$, visto che per il teorema sul limite del prodotto di una f. infinitesima con una limitata si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right) x^5}{x^3} = 0.$$

Quindi: Numeratore= $\frac{2}{3}x^3 + o(x^3)$.

Sviluppando $2^x = e^{\log 2\, x} = 1 + \log 2\, x + \frac{(\log 2)^2}{2}x^2 + o(x^2)$ e $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$, si ottiene

$$\text{Denominatore} = x^a \log x + \frac{(\log 2)^2}{2}x^2 + o(x^2) = \begin{cases} \text{se } 0 < a \le 2: & x^a \log x + o(x^a \log x) \\ \text{se } a > 2: & \frac{(\log 2)^2}{2}x^2 + o(x^2) \end{cases}$$

In conclusione:

$$\begin{cases} \text{se } 0 < a \le 2: & L = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{2}{3}x^3 + o(x^3)}{x^a \log x + o(x^a \log x)} = 0 \\ \text{se } a > 2: & L = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{2}{3}x^3 + o(x^3)}{\frac{(\log 2)^2}{2}x^2 + o(x^2)} = 0 \end{cases}$$

Esercizio 3 Calcolare l'integrale definito

$$\int_0^1 \frac{1}{10+e^x}\,dx\,.$$

Domanda facoltativa: Discutere la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_1^{+\infty} \frac{(\sinh x)^\alpha}{10+e^x}\,dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

Svolgimento. Utilizzando il cambiamento di variabile $y = e^x$, si ha:

$$\int_0^1 \frac{1}{10+e^x}\,dx \;=\; \int_1^e \frac{1}{10+y}\,\frac{dy}{y}\,.$$

Inoltre ponendo:

$$\frac{1}{(10+y)y} = \frac{A}{y} + \frac{B}{10+y},$$

si trova $A = 1/10$ e $B = -1/10$, quindi abbiamo:

$$\int_1^e \frac{1}{10+y}\,\frac{dy}{y} \;=\; \frac{1}{10}\int_1^e \frac{1}{y} - \frac{1}{10+y}\,dy \;=$$

$$\frac{1}{10}\left[\log(y) - \log(10+y)\right]\Big|_1^e = \frac{1}{10}\left[1 + \log\left(\frac{11}{10+e}\right)\right].$$

Facoltativo Si ha $(\sinh x)^\alpha \sim (e^x/2)^\alpha$, quando $x \to +\infty$, quindi

$$\frac{(\sinh x)^\alpha}{10+e^x} \sim \frac{e^{\alpha x}}{2^\alpha(10+e^x)},$$

Ponendo, come sopra $y = e^x$, si ha:

$$\int_1^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{2^\alpha(10+e^x)} = \int_e^{+\infty} \frac{1}{2^\alpha}\frac{y^\alpha}{(10+y)}\,\frac{dy}{y}.$$

Quando $y \to +\infty$, la seconda funzione integranda è asintotica a $\frac{1}{y^{2-\alpha}}$, che sappiamo essere integrabile se e solo se $2-\alpha > 1$. Quindi l'integrale generalizzato converge se e solo se $\alpha < 1$.

Esercizio 4 Data la funzione

$$f(x,y) = \log(x + e^y) + 3x^2 + \sqrt{y+1}\,,$$

1) determinarne il dominio e rappresentarlo nel piano cartesiano.

2) Calcolare il gradiente in $(0,0)$ e scrivere l'equazione del piano tangente al grafico in quel punto.

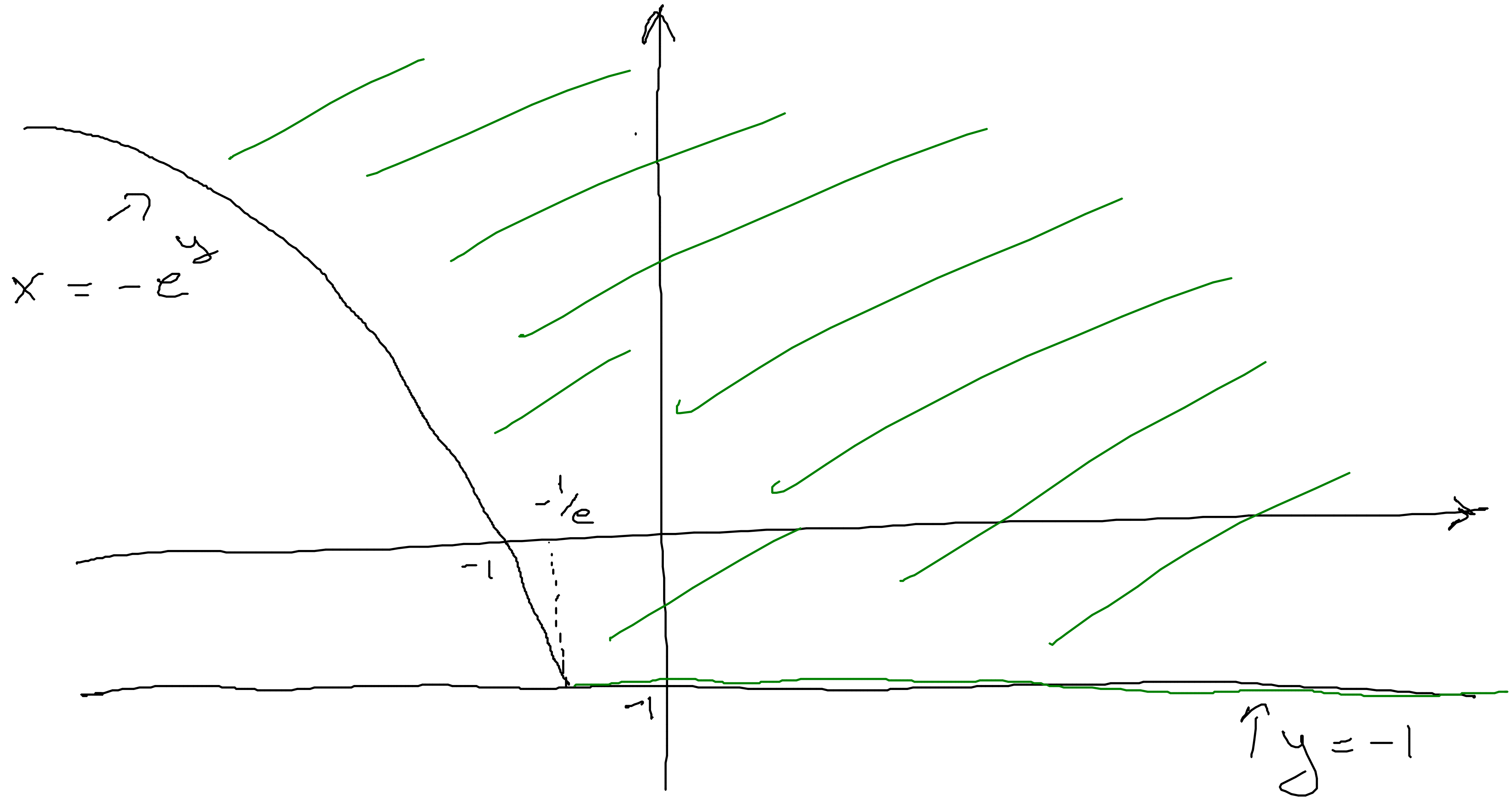
3) Calcolare la derivata direzionale di f in $(0,0)$ lungo $u = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

Svolgimento.

1. Il dominio é dato da:
$$D = \{(x,y) \,|\, y \geq -1,\, x > -e^y\,\}.$$

2. Derivando si ha:
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x+e^y} + 6x, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{e^y}{x+e^y} + \frac{1}{2}(y+1)^{-1/2}.$$
Quindi si ha:
$$\nabla f(0,0) = (1, 3/2).$$
Poiché $f(0,0) = 1$, l'equazione del piano tangente risulta:
$$z = 1 + x + \frac{3}{2}y.$$

3. Per calcolare la derivata direzionale si può utilizzare la formula del gradiente e si ottiene:
$$\frac{\partial f}{\partial u} = \nabla f(0,0) \cdot u = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{4}.$$



$x = -e^{y}$
$-1/e$
-1
-1
$y = -1$

ANALISI MATEMATICA 1

Commissione F. Albertini, V. Casarino e M. Motta

Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 20 febbraio 2013

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{|\log(x^2)| + \frac{x+3}{x}}.$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie e il segno di f;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f (Facoltativo: calcolare gli attacchi, cioè i limiti di f', nei punti significativi);

(d) disegnare un grafico qualitativo di f (non è richiesto lo studio di f'').

Esercizio 2

(a) Scrivere lo sviluppo di Mac Laurin di ordine 3 di

$$f(x) = (2 + \sinh(2x)) \cdot \log(1 + 2x).$$

(b) Calcolare poi il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{f(x)} - 1 - 4x}{x^{\alpha - 1}},$$

al variare di $\alpha > 1$.

Esercizio 3 Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\sin(2n) + 3) \left(2n^2 \tan\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^n.$$

Esercizio 4 Data la funzione

$$f(x, y) = \log\left(\frac{4x^2 - y^2}{4x^2 + y^2}\right),$$

1) determinarne il dominio, disegnarlo nel piano cartesiano e stabilire, in particolare, se è aperto o chiuso.

2) Dire se esiste ed eventualmente calcolare $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.

3) Calcolare il gradiente nel punto $(x_0, y_0) = (1, 0)$ e scrivere l'equazione del piano tangente al grafico in quel punto.

Tempo: due ore e mezza. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

ANALISI MATEMATICA 1

Commissione F. Albertini, V. Casarino e M. Motta

Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 20 febbraio 2013

TEMA 2

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{|\log(x^2)| + \frac{x+5}{x}}.$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie e il segno di f;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f (Facoltativo: calcolare gli attacchi, cioè i limiti di f', nei punti significativi);

(d) disegnare un grafico qualitativo di f (non è richiesto lo studio di f'').

Esercizio 2

(a) Scrivere lo sviluppo di Mac Laurin di ordine 3 di

$$f(x) = \log(1 + 2x) \cdot (1 + \arctan(x)).$$

(b) Calcolare poi il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{f(x)} - 1 - 2x}{x^{\alpha+1}},$$

al variare di $\alpha > -1$.

Esercizio 3 Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (5 + \cos(3n)) \left(\frac{1}{3} n^2 \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)^n.$$

Esercizio 4 Data la funzione

$$f(x, y) = \log\left(\frac{y^2 - 4x^2}{4x^2 + y^2}\right)$$

1) determinarne il dominio, disegnarlo nel piano cartesiano e stabilire, in particolare, se è aperto o chiuso.

2) Dire se esiste ed eventualmente calcolare $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.

3) Calcolare il gradiente nel punto $(x_0, y_0) = (0, 1)$ e scrivere l'equazione del piano tangente al grafico in quel punto.

Tempo: due ore e mezza. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

ANALISI MATEMATICA 1

Commissione F. Albertini, V. Casarino e M. Motta

Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 20 febbraio 2013

TEMA 3

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{|\log(x^2)| + \frac{x-3}{x}}.$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie e il segno di f;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f (Facoltativo: calcolare gli attacchi, cioè i limiti di f', nei punti significativi);

(d) disegnare un grafico qualitativo di f (non è richiesto lo studio di f'').

Esercizio 2

(a) Scrivere lo sviluppo di Mac Laurin di ordine 3 di

$$f(x) = (2 + \sin(4x)) \cdot \log(1 + 4x).$$

(b) Calcolare poi il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{f(x)} - 1 - 8x}{x^{\alpha - 1}},$$

al variare di $\alpha > 1$.

Esercizio 3 Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\sin(3n) + 4) \left(4n^2 \arctan\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^n.$$

Esercizio 4 Data la funzione

$$f(x, y) = \log\left(\frac{x^2 + 9y^2}{x^2 - 9y^2}\right),$$

1) determinarne il dominio, disegnarlo nel piano cartesiano e stabilire, in particolare, se è aperto o chiuso.

2) Dire se esiste ed eventualmente calcolare $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.

3) Calcolare il gradiente nel punto $(x_0, y_0) = (1, 0)$ e scrivere l'equazione del piano tangente al grafico in quel punto.

Tempo: due ore e mezza. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

ANALISI MATEMATICA 1

Commissione F. Albertini, V. Casarino e M. Motta

Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 20 febbraio 2013

TEMA 4

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{|\log(x^2)| + \frac{x-5}{x}}.$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie e il segno di f;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f (Facoltativo: calcolare gli attacchi, cioè i limiti di f', nei punti significativi);

(d) disegnare un grafico qualitativo di f (non è richiesto lo studio di f'').

Esercizio 2

(a) Scrivere lo sviluppo di Mac Laurin di ordine 3 di

$$f(x) = (\tan x + \frac{2}{3}) \cdot \log(1 + 3x).$$

(b) Calcolare poi il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{f(x)} - 1 - 2x}{x^{\alpha+1}},$$

al variare di $\alpha > -1$.

Esercizio 3 Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (4 + \cos(2n)) \left(\frac{1}{5} n^2 \sinh\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^n.$$

Esercizio 4 Data la funzione

$$f(x, y) = \log\left(\frac{x^2 + 9y^2}{9y^2 - x^2}\right)$$

1) determinarne il dominio, disegnarlo nel piano cartesiano e stabilire, in particolare, se è aperto o chiuso.

2) Dire se esiste ed eventualmente calcolare $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.

3) Calcolare il gradiente nel punto $(x_0, y_0) = (0, 1)$ e scrivere l'equazione del piano tangente al grafico in quel punto.

Tempo: due ore e mezza. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

ANALISI MATEMATICA 1

Commissione F. Albertini, V. Casarino e M. Motta

Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 20 febbraio 2013

TEMA 1

Esercizio 1. Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{|\log(x^2)| + \frac{x+3}{x}}$$

Sol. (a) Dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, no simmetrie, $f(x) > 0 \ \ \forall x \neq 0$.
(b) , $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$. Infatti

$$\lim_{x\to 0\pm} (|\log(x^2)| + \frac{x+3}{x}) = \lim_{x\to 0\pm} \frac{x|\log(x^2)| + x + 3}{x} = \lim_{x\to 0\pm} \frac{3}{x} = \frac{3}{0^{\pm}}$$

per la gerarchia degli infinitesimi ($\lim_{x\to 0\pm}(x|\log(x^2)| + x) = 0$).

Si osservi che, togliendo il valore assoluto:

$$f(x) = \begin{cases} x^2\, e^{\frac{x+3}{x}} & \text{se } \log(x^2) \geq 0, \text{ cioè se } x \leq -1 \text{ o } x \geq 1, \\ \frac{e^{\frac{x+3}{x}}}{x^2} & \text{se } \log(x^2) < 0, \text{ cioè se } -1 < x < 1. \end{cases} \tag{1}$$

Quindi $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} x\, e^{\frac{x+3}{x}} = \pm\infty$ e non ci sono asintoti obliqui a $\pm\infty$.
(c) Derivando (1) per $x \neq \pm 1, 0$:

$$f'(x) = \begin{cases} e^{\frac{x+3}{x}}(2x-3) & \text{se } x < -1 \text{ o } x > 1, \\ -\frac{e^{\frac{x+3}{x}}}{x^4}(2x+3) & \text{se } -1 < x < 1. \end{cases} \tag{2}$$

Quindi:

$f'(x) > 0$ per $x < -1$ o $x > 1$ se e solo se $x > 3/2$ e vale 0 per $x = 3/2$ (> 1);

$f'(x) > 0$ per $-1 < x < 1$ se e solo se $x < -3/2$ (< -1, non appartenente a $]-1, 1[$).

Segue che f è strettamente decrescente in $]-\infty, 0[$ e in $]0, 3/2[$ ed è strettamente crescente in $]3/2, +\infty[$. Ha minimo relativo in $3/2$, non ha minimo assoluto e $\inf f = 0$; non ha massimo assoluto e $\sup f = +\infty$.
(Fac) Gli attacchi di f' da calcolare sono in $\pm 1^{\pm}$ e in 0^-.

Si ha:

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} -\frac{e^{\frac{x+3}{x}}}{x^4}(2x+3) = -5e^4.$$

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} e^{\frac{x+3}{x}}(2x-3) = -e^{-2}.$$

Quindi f non risulta derivabilie in $x = 1$.

$$\lim_{x\to -1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} e^{\frac{x+3}{x}}(2x-3) = -5e^{-2}.$$

$$\lim_{x\to -1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} -\frac{e^{\frac{x+3}{x}}}{x^4}(2x+3) = -e^{-2}.$$

Quindi f non risulta derivabilie in $x=-1$. Infine si ha:

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} -\frac{e^{\frac{x+3}{x}}}{x^4}(2x+3) = \lim_{x\to 0^-} -e(2x+3)\frac{e^{\frac{3}{x}}}{x^4} = -3e \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{\frac{3}{x}}}{x^4}.$$

Ponendo $y = -\frac{3}{x}$, se $x \to 0^-$ allora $y \to +\infty$, quindi il limite diventa:

$$-\frac{e}{27}\lim_{y\to+\infty}\frac{y^4}{e^y} = 0.$$

Esercizio 2

(a) Scrivere lo sviluppo di Mac Laurin di ordine 3 di

$$f(x) = (2+\sinh(2x))\cdot\log(1+2x)$$

(b) calcolare per $\alpha > 1$:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{f(x)}-1-4x}{x^{\alpha-1}}.$$

Sol. (a) Per gli sviluppi del sinh e del log si ha:

$$f(x) = \left(2+2x+\frac{4}{3}x^3+o(x^3)\right)\left(2x-2x^2+\frac{8}{3}x^3+o(x^3)\right)$$

da cui segue che lo sviluppo di Mac Laurin di ordine 3 di f è: $f(x) = 4x + \frac{4}{3}x^3 + o(x^3)$.

(b) Usando lo sviluppo precedente e lo sviluppo dell'esponenziale:

$$e^{f(x)} = 1 + f(x) + \frac{1}{2}[f(x)]^2 + o([f(x)]^2) = 1+4x+\frac{1}{2}(4x)^2+o(x^2) = 1+4x+8x^2+o(x^2)$$

da cui si ottiene

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{f(x)}-1-4x}{x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{8x^2}{x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to 0^+} 8x^{3-\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{se } 1<\alpha<3 \\ 8 & \text{se } \alpha=3 \\ +\infty & \text{se } \alpha>3 \end{cases}$$

Esercizio 3 Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(\sin(2n)+3)\left(2n^2\arctan\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^n$$

Sol. Metodo 1. Osserviamo che $a_n \doteq (\sin(2n)+3)\left(2n^2\arctan\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^n$ è positiva e che, essendo $2 \le (\sin(2n)+3) \le 4$, posto $b_n \doteq \left(2n^2\arctan\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^n$, si ha $0 < 2\,b_n \le a_n \le 4\,b_n$, per cui per cui la serie data converge o diverge se e solo se converge o diverge, rispettivamente, la serie $\Sigma\, b_n$, per il Criterio del Confronto. Studiamo quindi la convergenza di $\Sigma\, b_n$ con il criterio della radice:

$$L = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{b_n} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(2n^2\arctan\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^n} = \lim_{n\to+\infty}\left(2n^2\arctan\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 2.$$

Poichè $L = 2 > 1$, la serie data diverge.

Metodo 2. Si può anche applicare direttamente il criterio della radice ad a_n, dopo aver mostrato che è a termini positivi:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{1}{n}\ \log(\sin(2n)+3)} \log(1 + \left(2n^2 \arctan\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 2,$$

perchè $e^{\frac{1}{n}\ \log(\sin(2n)+3)}$ tende a $e^0 = 1$, essendo $\log 2 \leq \log(\sin(2n) + 3) \leq \log(4)$, successione limitata, moltiplicata per la successione infinitesima $1/n$.

Esercizio 4 Data

$$f(x,y) = \log\left(\frac{4x^2 - y^2}{4x^2 + y^2}\right)$$

(a) disegnare il dominio di f e dire se risulta aperto o chiuso, limitato o illimitato.

(b) Dire se esiste ed in tal caso calcolare il $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

(c) Gradiente in $(1, \sqrt{2})$ ed equazione del piano tangente al grafico di f in quel punto.

Sol.(a) Il dominio di f è

$$\left\{(x,y):\ \frac{4x^2 - y^2}{4x^2 + y^2} > 0\right\} = \big\{(x,y):\ 4x^2 > y^2,\ (x,y) \neq (0,0)\big\} = \{(x,y):\ -2|x| < y < 2|x|,\ (x,y) \neq (0,0)\}$$

È aperto e illimitato.

(b) Metodo 1. In coordinate polari:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to 0^+} \log\left(\frac{\rho^2(4\cos^2\theta - \sin^2\theta)}{\rho^2(4\cos^2\theta + \sin^2\theta)}\right) = \log\left(\frac{4\cos^2\theta - \sin^2\theta}{4\cos^2\theta + \sin^2\theta}\right)$$

che dipende da θ, per cui il limite non esiste.

Metodo 2. Per dire che il limite non esiste basta osservare che lungo la retta $y = 0$, $f(x,0) = \log\left(\frac{4x^2}{4x^2}\right) = 0$ mentre lungo $y = x$, $f(x,x) = \log\left(\frac{4x^2 - x^2}{4x^2 + x^2}\right) = \log(3/5)$, per cui i due limiti a $(0,0)$ sono diversi.

(c) $(1,0)$ è interno al dominio di f che risulta ivi continua e derivabile infinite volte, per cui f è differenziabile ed esiste il piano tangente. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{16xy^2}{(4x^2 - y^2)(4x^2 + y^2)}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{16x^2 y}{(4x^2 - y^2)(4x^2 + y^2)}$$

per cui $\nabla f(1,0) = (0,0)$, $f(1,0) = 0$ e il piano tangente è

$$z = 0.$$

ANALISI MATEMATICA 1

Commissione F. Albertini, V. Casarino e M. Motta

Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 29 gennaio 2013

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = 2\arctan(e^x - 2) - \log|e^x - e^2|$$

(a) Determinare il dominio ed eventuali simmetrie di f; non è richiesto lo studio del segno di f;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f. Calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) disegnare un grafico qualitativo di f (non è richiesto lo studio di f'').

Esercizio 2 Calcolare al variare del parametro $\alpha > 0$ il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 4x^3 + 2x}{\sqrt{1+x^6} - 1 + 3x^3}.$$

Esercizio 3 Discutere la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[3]{4+n} - \sqrt[3]{n}}{\sqrt{2\log n}}.$$

Esercizio 4 Calcolare l'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-|4-x|}}{e^x}\, dx.$$

Domanda facoltativa: Discutere la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^a e^{-|4-x|}}{e^x}\, dx.$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Tempo: due ore e mezza. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

ANALISI MATEMATICA 1

Commissione F. Albertini, V. Casarino e M. Motta

Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 29 gennaio 2013

TEMA 2

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \log|e - e^x| + 2\arctan(1 - e^x)$$

(a) Determinare il dominio ed eventuali simmetrie di f; non è richiesto lo studio del segno di f;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f. Calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) disegnare un grafico qualitativo di f (non è richiesto lo studio di f'').

Esercizio 2 Calcolare al variare del parametro $\alpha > 0$ il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{1+x^4} - 1 + 2x^4}{6x^4 - \alpha x^\alpha \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) + 3x}.$$

Esercizio 3 Discutere la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[3]{5+n} - \sqrt[3]{n}}{\sqrt{4\log n}}.$$

Esercizio 4 Calcolare l'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{e^{|3-x|}}\,dx.$$

Domanda facoltativa: Discutere la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^a e^{-x}}{e^{|3-x|}}\,dx.$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Tempo: due ore e mezza. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

ANALISI MATEMATICA 1

Commissione F. Albertini, V. Casarino e M. Motta
Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 29 gennaio 2013

TEMA 3

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = 2\arctan(e^x - 3) - \log|e^3 - e^x|$$

(a) Determinare il dominio ed eventuali simmetrie di f; non è richiesto lo studio del segno di f;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f. Calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) disegnare un grafico qualitativo di f (non è richiesto lo studio di f'').

Esercizio 2 Calcolare al variare del parametro $\alpha > 0$ il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha x^\alpha \left(\cosh\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right) - 2x^2 + 5x}{\log(1+x^2) - 3x^2}.$$

Esercizio 3 Discutere la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \, \frac{\sqrt[3]{2+n} - \sqrt[3]{n}}{\sqrt{3\log n}}\,.$$

Esercizio 4 Calcolare l'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-|1-x|}}{e^x}\,dx.$$

Domanda facoltativa: Discutere la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^a e^{-|1-x|}}{e^x}\,dx.$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Tempo: due ore e mezza. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

ANALISI MATEMATICA 1

Commissione F. Albertini, V. Casarino e M. Motta

Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 29 gennaio 2013

TEMA 4

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \log|e^x - e^4| - 2\arctan(e^x - 4)$$

(a) Determinare il dominio ed eventuali simmetrie di f; non è richiesto lo studio del segno di f;

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare f per continuità;

(c) studiare la continuità e la derivabilità di f, studiare la monotonia e determinare gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo ed assoluto di f. Calcolare i limiti di f' se significativi;

(d) disegnare un grafico qualitativo di f (non è richiesto lo studio di f'').

Esercizio 2 Calcolare al variare del parametro $\alpha > 0$ il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - 4\log(1+x^3)}{6x^4 - \alpha x^\alpha \arctan\left(\frac{1}{x^2}\right) + 3x}.$$

Esercizio 3 Discutere la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[3]{3+n} - \sqrt[3]{n}}{\sqrt{5\log n}}.$$

Esercizio 4 Calcolare l'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{e^{|2-x|}}\, dx.$$

Domanda facoltativa: Discutere la convergenza dell'integrale generalizzato

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^a e^{-x}}{e^{|2-x|}}\, dx.$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Tempo: due ore e mezza. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

Svolgimento TEMA 1

Esercizio 1 .

$$f(x) = 2\arctan(e^x - 2) - \log|e^x - e^2|$$

(a) Il dominio è $\{x : \ |e^x - e^2| > 0\} = \{x : \ e^x - e^2 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Non ci sono simmetrie o periodicità evidenti.

(b) Limiti:

1. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2\arctan(-2) - \log(e^2) = -2\arctan 2 - 2$ (< 0). Quindi c'è un asintoto orizzontale $y = -2\arctan 2 - 2$ a $-\infty$.

2. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, e poichè $|e^x - e^2| = e^x - e^2$ quando $x \geq 2$, per tali x possiamo riscrivere
$$f(x) = 2\arctan(e^x - 2) - \log[e^x(1 - e^{2-x})] = 2\arctan(e^x - 2) - x - \log(1 - e^{2-x})$$
Si ottiene allora che $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$ e $\lim_{x\to+\infty}[f(x)+x] = \pi$. Quindi f ha $y = -x+\pi$ come asintoto obliquo a $+\infty$.

3. $\lim_{x\to 2^\pm} f(x) = +\infty$, quindi $x = 2$ è un asintoto verticale completo.

(c) Derivabilità: f è continua e derivabile $\forall x \neq 2$ perchè composizione di f ivi derivabili.

$$f'(x) = \frac{2\,e^x}{1 + (e^x - 2)^2} - \frac{e^x}{e^x - e^2} = \frac{e^x}{[1 + (e^x - 2)^2](e^x - e^2)}[2e^x - 2e^2 - 1 - (e^x - 2)^2],$$

dove $f'(x) > 0$ se e solo se

$$\frac{[2e^x - 2e^2 - 1 - (e^x - 2)^2]}{e^x - e^2} = -\frac{[e^{2x} - 6e^x + 2e^2 + 5]}{e^x - e^2} > 0.$$

Poichè il polinomio di secondo grado in e^x dentro le parentesi quadre a numeratore ha $\Delta < 0$ (per cui è sempre strettamente positivo), $f'(x) >$ se e solo se $e^x - e^2 < 0$, cioè se $x < 2$. la funzione f è allora strettamente crescente per $x < 2$ e strettamente decrescente per $x > 2$. Inoltre f è illimitata, perchè $\sup f = +\infty$ e $\inf f = -\infty$ e non assume max e min relativi o assoluti.

Esercizio 2 . Il limite

$$L = \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 4x^3 + 2x}{\sqrt{1 + x^6} - 1 + 3x^3}$$

è una forma indeterminata ∞/∞. A numeratore, poichè $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, possiamo sviluppare con Mac Laurin

$$\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{6}\frac{1}{x^3} + o(\frac{1}{x^3})$$

che sostituendo e usando le proprietà di "o-piccolo" porta a

$$\alpha x^\alpha \sin\left(\frac{1}{x}\right) - 4x^3 + 2x = \alpha\, x^{\alpha-1} - \frac{\alpha}{6}\, x^{\alpha-3} - 4x^3 + 2x + o(x^{\alpha-3}) = \begin{cases} -4x^3 + o(x^3) & \text{se } \alpha < 4, \\ \left(-\frac{2}{3} + 2\right)x + o(x) & \text{se } \alpha = 4, \\ \alpha\, x^{\alpha-1} + o(x^{\alpha-1}) & \text{se } \alpha > 4. \end{cases}$$

A denominatore, $\sqrt{1+x^6} \sim x^3$ a $+\infty$, dunque $\sqrt{1+x^6}-1+3x^3 = 4x^3+o(x^3)$. In conclusione, $L=-1$ se $\alpha \in]0,4[$; $L=0$ se $\alpha=4$ e $L=+\infty$ se $\alpha>4$.

Esercizio 3 .

Osserviamo che la serie è a termini di segno alterno, poiché $b_n := \frac{\sqrt[3]{4+n}-\sqrt[3]{n}}{\sqrt{2\log n}} > 0$ per ogni $n \geq 2$.

Studiamo innanzitutto la convergenza assoluta.

Ricordando che $x^3-y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$, poniamo $x=\sqrt[3]{4+n}$ e $y=\sqrt[3]{n}$, ottenendo

$$\begin{aligned} b_n = \frac{\sqrt[3]{4+n}-\sqrt[3]{n}}{\sqrt{2\log n}} &= \frac{4+n-n}{\sqrt[3]{(4+n)^2}++\sqrt[3]{(4+n)n}+\sqrt[3]{n^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\log n}} \\ &= \frac{4}{\sqrt[3]{(4+n)^2}++\sqrt[3]{(4+n)n}+\sqrt[3]{n^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\log n}} . \end{aligned}$$

Quando $n \to +\infty$, si ha

$$\frac{4}{\sqrt[3]{(4+n)^2}++\sqrt[3]{(4+n)n}+\sqrt[3]{n^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\log n}} \sim \frac{4}{3\sqrt{2}n^{2/3}(\log n)^{1/2}} .$$

La serie $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{2/3}(\log n)^{1/2}}$ diverge, perché, per esempio, $\frac{1}{n^{2/3}(\log n)^{1/2}} > \frac{1}{n^{5/6}}$ per ogni $n>1$. Poiché la serie armonica generalizzata $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{5/6}}$ diverge, per il criterio del confronto diverge anche $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{2/3}(\log n)^{1/2}}$.

Come applicazione del criterio del confronto asintotico, ne deduciamo che diverge anche $\sum_{n=2}^{+\infty} b_n$, cioè che la serie data non converge assolutamente.

Passiamo ora a studiare la convergenza semplice della serie data. Dai conti appena svolti si deduce che b_n tende a zero quando $n \to +\infty$. Per poter applicare il criterio di Leibniz, è sufficiente dimostrare che $\{b_n\}$ è monotona decrescente, almeno definitivamente.

<u>Metodo 1.</u> b_n è decrescente perchè reciproco di una successione positiva strettamente crescente, infatti

$$\frac{1}{b_n} = \frac{1}{4}\left(\sqrt[3]{(4+n)^2}+\sqrt[3]{(4+n)n}+\sqrt[3]{n^2}\right)\sqrt{2\log n}$$

è somma di successioni strettamente crescenti e positive moltiplicate per una successione crescente e positiva.

<u>Metodo 2.</u> Consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{4+x}-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{2\log x}} .$$

Derivando f, otteniamo

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\log x}\left(\left(\frac{1}{3}(4+x)^{-2/3}-\frac{1}{3}(x)^{-2/3}\right)\sqrt{2\log x}-(\sqrt[3]{x+4}-\sqrt[3]{x})\frac{1}{2x\sqrt{2\log x}}\right) \\ &= \frac{1}{2\log x}\left(\left(\frac{(x)^{2/3}-(4+x)^{2/3}}{3(4+x)^{2/3}x^{2/3}}\right)\sqrt{2\log x}-(\sqrt[3]{x+4}-\sqrt[3]{x})\frac{1}{2x\sqrt{2\log x}}\right) . \end{aligned}$$

Osserviamo ora che $\left(\frac{(x)^{2/3}-(4+x)^{2/3}}{3(4+x)^{2/3}x^{2/3}}\right)\sqrt{2\log x} < 0$ e che $(\sqrt[3]{x+4}-\sqrt[3]{x})\frac{1}{2x\sqrt{2\log x}} > 0$ per ogni $x \geq 2$, così che $f'(x) < 0$ per ogni $x \geq 2$. Come conseguenza del criterio di Leibniz, la serie data converge semplicemente.

Esercizio 4 .

Osserviamo che

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-|4-x|}}{e^x}\,dx = \int_0^4 \frac{xe^{x-4}}{e^x}\,dx + \int_4^{+\infty} \frac{xe^{4-x}}{e^x}\,dx,$$

purchè entrambi gli integrali esistano finiti. Li studiamo quindi separatamente.

Osserviamo prima di tutto che

$$\int_0^4 \frac{xe^{x-4}}{e^x}\,dx = \int_0^4 xe^{-4}\,dx = 8e^{-4}\,.$$

Si ha inoltre

$$\int_4^{+\infty} \frac{xe^{4-x}}{e^x}\,dx = e^4 \lim_{R\to+\infty} \int_4^R \frac{xe^{-x}}{e^x}\,dx = e^4 \lim_{R\to+\infty} \int_4^R xe^{-2x}\,dx\,.$$

Calcoliamo l'integrale indefinito $\int xe^{-2x}\,dx$, integrando per parti. Ponendo $f(x) = x$ e $g'(x) = e^{-2x}$, otteniamo

$$\int xe^{-2x}\,dx = -\frac{x}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\,,$$

da cui segue

$$\int_4^{+\infty} \frac{xe^{4-x}}{e^x}\,dx = e^4 \lim_{R\to+\infty} \int_4^R xe^{-2x}\,dx = e^4 \lim_{R\to+\infty} \Big(-\frac{x}{2}e^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\Big)\Big|_4^R = \frac{9}{4}e^4e^{-8} = \frac{9}{4}e^{-4}\,.$$

Poiché entrambi gli integrali esistono finiti, concludiamo che

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-|4-x|}}{e^x}\,dx = \int_0^4 \frac{xe^{x-4}}{e^x}\,dx + \int_4^{+\infty} \frac{xe^{4-x}}{e^x}\,dx = 8e^{-4} + \frac{9}{4}e^{-4} = \frac{41}{4}e^{-4}\,.$$

Domanda facoltativa:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^a e^{-|4-x|}}{e^x}\,dx.$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Possono esservi problemi di convergenza sia per $x \to 0^+$, sia per $x \to +\infty$. Studiamo quindi separatamente i due integrali

$$\int_0^4 \frac{x^a e^{-|4-x|}}{e^x}\,dx \;\; e \;\; \int_4^{+\infty} \frac{x^a e^{-|4-x|}}{e^x}\,dx\,.$$

L'integrale generalizzato assegnato converge se entrambi gli integrali convergono. Abbiamo gi à osservato che

$$\int_0^4 \frac{x^a e^{-|4-x|}}{e^x}\,dx = e^{-4} \int_0^4 x^a\,dx.$$

Questo integrale converge per ogni valore $a > -1$. Risulta inoltre

$$\int_4^{+\infty} \frac{x^a e^{4-x}}{e^x}\,dx = e^4 \int_4^{+\infty} x^a e^{-2x}\,dx =$$

Questo integrale converge per ogni valore reale di a, perché la funzione $x^a e^{-2x}$ è infinitesima di ordine superiore a 1 al tendere di $x \to +\infty$ per ogni valore di a.

In conclusione, l'integrale assegnato converge per ogni valore di $a > -1$.

ANALISI MATEMATICA 1

Commissione V. Casarino, P. Mannucci, C. Marchi

Ingegneria Gestionale, Meccanica-Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 7 Febbraio 2012

TEMA 1

Esercizio 1 (9 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \log|e^{2x} - 1| + \frac{2}{e^{2x} - 1}.$$

(a) Determinare il dominio di f, eventuali simmetrie e periodicità, i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti di f.

(b) Studiare la continuità e la derivabilità di f; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f.

(c) Disegnare un grafico qualitativo di f in tutto il dominio.
Non è richiesto lo studio della convessità della funzione.

Facoltativo: Stabilire se esiste un punto $x_0 > 0$ tale che $f(x_0) < 2x_0$.

Esercizio 2 (7 punti) Si consideri la funzione

$$\frac{2e^{2x} - 5e^x}{\sqrt{e^{2x} - 5e^x + 6}}.$$

(a) Trovarne una primitiva.

(b) Calcolarne l'integrale sull'intervallo $(\log 4, +\infty)$.

Esercizio 3 (8 punti)

(a) Scrivere lo sviluppo di McLaurin di ordine 3 della funzione

$$g(x) = \log(1 + \sin(3x)) - \alpha \arctan(3x) + \frac{9}{2}x^2,$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) Determinare α in modo tale che

$$g(x) = o(x^2) \quad \text{per} \quad x \to 0.$$

Esercizio 4 (7 punti) Studiare la convergenza assoluta e semplice della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{3n - 2\log n}.$$

Tempo: **due ore e mezza**. Motivare tutte le risposte

N.B. Le parti facoltative vanno fatte dopo aver fatto le altri parti e non servono per ottenere l'ammissione all'orale.

N.B. Chi è sorpreso a parlare o copiare non solo verrà allontanato dall'aula ma non potrà sostenere l' appello successivo a questo.

ANALISI MATEMATICA 1

Commissione V. Casarino, P. Mannucci, C. Marchi

Ingegneria Gestionale, Meccanica-Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 7 Febbraio 2012

TEMA **2**

Esercizio 1. (9 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \log|e^{4x} - 1| + \frac{3}{e^{4x} - 1}.$$

(a) Determinare il dominio di f, eventuali simmetrie e periodicità, i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti di f.

(b) Studiare la continuità e la derivabilità di f; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f.

(c) Disegnare un grafico qualitativo di f in tutto il dominio.
Non è richiesto lo studio della convessità della funzione.

Facoltativo: Stabilire se esiste un punto $x_0 > 0$ tale che $f(x_0) < 4x_0$.

Esercizio 2 (7 punti) Si consideri la funzione

$$\frac{2e^{2x} + 2e^x}{\sqrt{e^{2x} + 2e^x - 8}}.$$

(a) Trovarne una primitiva.

(b) Calcolarne l'integrale sull'intervallo $(\log 3, +\infty)$.

Esercizio 3. (8 punti)

(a) Scrivere lo sviluppo di McLaurin di ordine 3 della funzione

$$g(x) = \beta \arctan(2x) - \log(1 + \sin(2x)) - 2x^2,$$

al variare del parametro $\beta \in \mathbb{R}$.

(b) Determinare β in modo tale che

$$g(x) = o(x^2) \quad \text{per} \quad x \to 0.$$

Esercizio 4. (7 punti) Studiare la convergenza assoluta e semplice della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{4n - \log n}.$$

Tempo: **due ore e mezza**. Motivare tutte le risposte

N.B. Le parti facoltative vanno fatte dopo aver fatto le altri parti e non servono per ottenere l'ammissione all'orale.

N.B. Chi è sorpreso a parlare o copiare non solo verrà allontanato dall'aula ma non potrà sostenere l' appello successivo a questo.

ANALISI MATEMATICA 1

Commissione V. Casarino, P. Mannucci, C. Marchi

Ingegneria Gestionale, Meccanica-Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 7 Febbraio 2012

TEMA 3

Esercizio 1. (9 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \log|e^{2x} - 1| + \frac{3}{e^{2x} - 1}.$$

(a) Determinare il dominio di f, eventuali simmetrie e periodicità, i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti di f.

(b) Studiare la continuità e la derivabilità di f; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f.

(c) Disegnare un grafico qualitativo di f in tutto il dominio.
Non è richiesto lo studio della convessità della funzione.

Facoltativo: Stabilire se esiste un punto $x_0 > 0$ tale che $f(x_0) < 2x_0$.

Esercizio 2 (7 punti) Si consideri la funzione

$$\frac{2e^{2x} + e^x}{\sqrt{e^{2x} + e^x - 6}}.$$

(a) Trovarne una primitiva.

(b) Calcolarne l'integrale sull'intervallo $(\log 5, +\infty)$.

Esercizio 3. (8 punti)

(a) Scrivere lo sviluppo di McLaurin di ordine 3 della funzione

$$g(x) = \log(1 - \sinh(3x)) + \alpha \arctan(3x) + \frac{9}{2}x^2,$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$.

(b) Determinare α in modo tale che

$$g(x) = o(x^2) \quad \text{per} \quad x \to 0.$$

Esercizio 4. (7 punti) Studiare la convergenza assoluta e semplice della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{3n - \log n}.$$

Tempo: **due ore e mezza**. Motivare tutte le risposte

N.B. Le parti facoltative vanno fatte dopo aver fatto le altri parti e non servono per ottenere l'ammissione all'orale.

N.B. Chi è sorpreso a parlare o copiare non solo verrà allontanato dall'aula ma non potrà sostenere l' appello successivo a questo.

ANALISI MATEMATICA 1

Commissione V. Casarino, P. Mannucci, C. Marchi
Ingegneria Gestionale, Meccanica-Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 7 Febbraio 2012

TEMA 4

Esercizio 1. (9 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \log|e^{3x} - 1| + \frac{2}{e^{3x} - 1}\,.$$

(a) Determinare il dominio di f, eventuali simmetrie e periodicità, i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti di f.

(b) Studiare la continuità e la derivabilità di f; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f.

(c) Disegnare un grafico qualitativo di f in tutto il dominio.
Non è richiesto lo studio della convessità della funzione.

Facoltativo: Stabilire se esiste un punto $x_0 > 0$ tale che $f(x_0) < 3x_0$.

Esercizio 2 (7 punti) Si consideri la funzione

$$\frac{2e^{2x} - e^x}{\sqrt{e^{2x} - e^x - 6}}.$$

(a) Trovarne una primitiva.

(b) Calcolarne l'integrale sull'intervallo $(\log 4, +\infty)$.

Esercizio 3. (8 punti)

(a) Scrivere lo sviluppo di McLaurin di ordine 3 della funzione

$$g(x) = \log(1 - \sinh(2x)) + \beta\arctan(2x) + 2x^2\,,$$

al variare del parametro $\beta \in \mathbb{R}$.

(b) Determinare β in modo tale che

$$g(x) = o(x^2) \quad \text{per} \quad x \to 0\,.$$

Esercizio 4. (7 punti) Studiare la convergenza assoluta e semplice della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{2n - \log n}.$$

Tempo: **due ore e mezza**. Motivare tutte le risposte

N.B. Le parti facoltative vanno fatte dopo aver fatto le altri parti e non servono per ottenere l'ammissione all'orale.

N.B. Chi è sorpreso a parlare o copiare non solo verrà allontanato dall'aula ma non potrà sostenere l' appello successivo a questo.

ANALISI MATEMATICA 1

Commissione V. Casarino, P. Mannucci, C. Marchi
Ingegneria Gestionale, Meccanica-Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 7 Febbraio 2012

Soluzioni del tema 1

Esercizio 1

(a) Osserviamo innanzitutto che la funzione f si può esprimere come

$$f(x) = \begin{cases} \log(e^{2x}-1) + \frac{2}{e^{2x}-1} & \text{se } x > 0\,, \\ \log(1-e^{2x}) + \frac{2}{e^{2x}-1} & \text{se } x < 0\,. \end{cases}$$

Il dominio di f è l'insieme $\operatorname{dom} f := \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$. La funzione non presenta simmetrie nè periodicità. Si ha, inoltre, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -2$, $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = (y = e^{2x}-1) = \lim\limits_{y\to0^+}(\log y + 2/y) = +\infty$ (per gerarchia degli infiniti) e $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -\infty$.
La retta $y = -2$ è quindi asintoto orizzontale sinistro.
Per $x > 0$, osserviamo che

$$f(x) = 2x + \log\big(1 - \frac{1}{e^{2x}}\big) + \frac{2}{e^{2x}-1}\,; \tag{1}$$

ciò implica $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x) - 2x\big) = 0$, così che la retta $y = 2x$ è asintoto obliquo destro per f.

(b) La funzione è continua sul suo dominio, come conseguenza dei teoremi sulla somma, la composizione e il quoziente di funzioni continue. La funzione è inoltre derivabile nei punti del suo dominio, come conseguenza dei teoremi sulla somma, la composizione e il quoziente di funzioni derivabili.
Risulta, inoltre, per $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}-1} - \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2} = \frac{2e^{2x}(e^{2x}-3)}{(e^{2x}-1)^2}\,,$$

così che f è decrescente sull'intervallo $(0, \frac{\log 3}{2})$, crescente in $(\frac{\log 3}{2}, +\infty)$.
Il punto $x_1 = \frac{\log 3}{2}$ è un punto di minimo relativo (non assoluto), e si ha $f(x_1) = \log 2 + 1$.
Per $x < 0$ si ha poi

$$f'(x) = \frac{-2e^{2x}}{1-e^{2x}} - \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}-1)^2} = -\frac{2e^{2x}(3-e^{2x})}{(1-e^{2x})^2}\,.$$

Poiché $e^{2x} < 3$ per ogni $x < 0$, risulta $f'(x) < 0$ per ogni $x < 0$, così che f è decrescente sull'intervallo $(-\infty, 0)$.

Domanda facoltativa. Infine, per stabilire se esiste un punto $x_0 > 0$ tale che $f(x_0) < 2x_0$ studiamo la convessità di f. Per calcolare la derivata seconda, scriviamo $f'(x) = h(g(x))$, $x > 0$, con $g(x) = e^{2x}$ e $h(t) = \frac{2t(t-3)}{(t-1)^2}$.
Poiché risulta $h(t) = 2 - \frac{2}{t-1} - \frac{4}{(t-1)^2}$, si ha allora

$$f''(x) = h'(g(x))\,g'(x) = 2e^{2x}\Big(\frac{2}{(e^{2x}-1)^2} + \frac{8}{(e^{2x}-1)^3}\Big) \geq 0$$

per ogni $x > 0$. Dalla convessità di f si deduce che non esiste un punto $x_0 > 0$ tale che $f(x_0) < 2x_0$.
Un'altra possibilità consiste nello studiare il segno di $f(x) - 2x$ usando la formula (**??**). Si dimostra facilmente, usando gli sviluppi elementari per $x \to +\infty$, che $f(x) - 2x > 0$.

Esercizio 2

Innanzitutto consideriamo la sostituzione $e^x = y$. Poiché $e^x\,dx = dy$ si ha

$$\int \frac{2e^{2x} - 5e^x}{\sqrt{e^{2x} - 5e^x + 6}}\,dx = \int \frac{2y-5}{\sqrt{y^2-5y+6}}\,dy.$$

Al numeratore si ha proprio la derivata della funzione sotto radice, quindi con la sostituzione $y^2-5y+6 = z$, l'integrale diventa

$$\int \frac{1}{\sqrt{z}}\, dz = 2z^{1/2} + C$$

e considerando le sostituzioni fatte si ha che una primitiva della funzione è $2\sqrt{e^{2x} - 5e^x + 6} + C$, $C \in \mathbb{R}$.
Per calcolare l'integrale generalizzato basta usare la definizione:

$$\int_{\log 4}^{+\infty} \frac{2e^{2x} - 5e^x}{\sqrt{e^{2x} - 5e^x + 6}}\, dx = \lim_{k\to+\infty} \int_{\log 4}^{k} \frac{2e^{2x} - 5e^x}{\sqrt{e^{2x} - 5e^x + 6}}\, dx = \lim_{k\to+\infty} 2\sqrt{e^{2k} - 5e^k + 6} - 2\sqrt{2} = +\infty.$$

Quindi l'integrale diverge a $+\infty$.

Esercizio 3

(a) Dagli sviluppi elementari si deduce che

$$\begin{aligned} g(x) &= \log\left(1 + \sin(3x)\right) - \alpha \arctan(3x) + \frac{9}{2}x^2 \\ &= \sin(3x) - \frac{1}{2}\big(\sin(3x)\big)^2 + \frac{1}{3}\big(\sin(3x)\big)^3 - 3\alpha x + \frac{1}{3}\alpha(3x)^3 + \frac{9}{2}x^2 + o(x^3) \\ &= 3(1-\alpha)x + \frac{9}{2}x^2 - \frac{9}{2}x^2 - \frac{1}{3!}(3x)^3 + 9x^3 + 9\alpha x^3 + o(x^3) \\ &= 3(1-\alpha)x + 9(\alpha + \frac{1}{2})x^3 + o(x^3)\,, \end{aligned}$$

per $x \to 0$, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ (si osservi che nel primo passaggio si è usata la relazione $o([\sin x]^3) = o(x^3)$).

(b) Affinchè risulti $g(x) = o(x^2)$ per $x \to 0$, il termine di primo grado nello sviluppo di g deve annullarsi. Bisogna quindi imporre $\alpha = 1$.

Esercizio 4 Denotiamo $a_n := \frac{\sqrt{n}}{3n-2\log n}$.

*) *Convergenza assoluta.* Si deve studiare il comportamento della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$. Osserviamo che

$$a_n = \frac{1}{3} \underbrace{\frac{\sqrt{n}}{n}}_{=n^{-1/2}} \underbrace{\frac{1}{1 - \frac{2\log n}{3n}}}_{\to 1};$$

in particolare ne deduciamo che $a_n \sim \frac{1}{3}n^{-1/2}$. Per il criterio del confronto asintotico, essendo divergente la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-1/2}$, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è divergente.

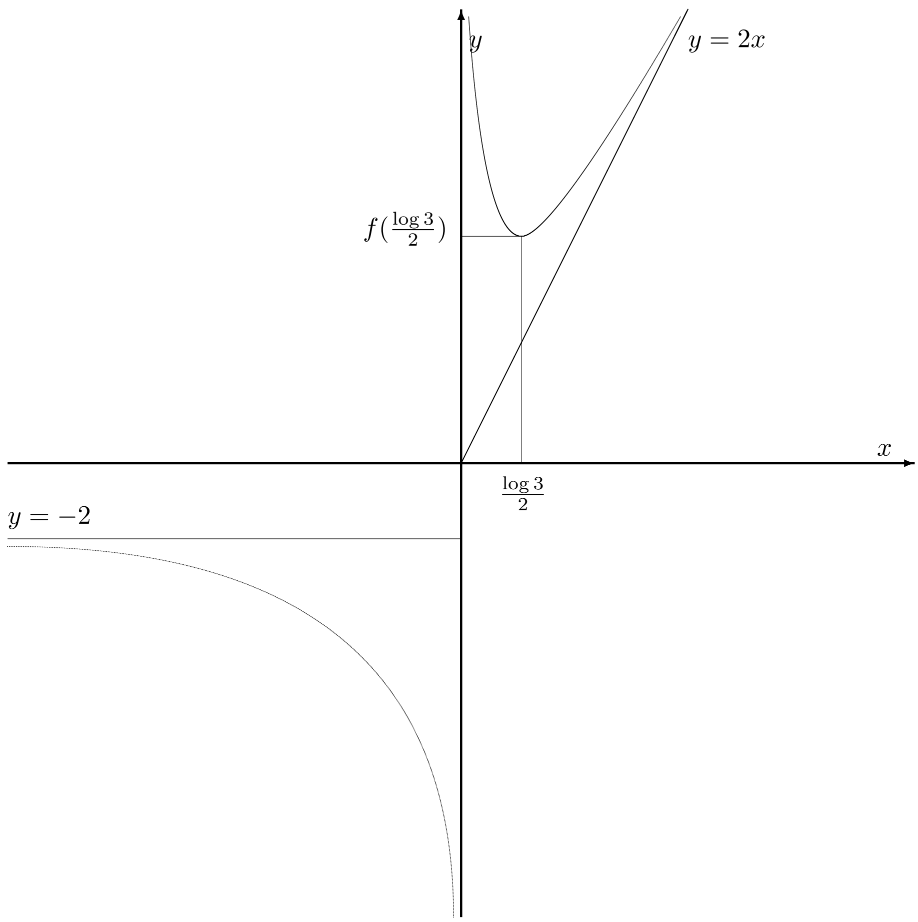
*) *Convergenza semplice.* Verifichiamo le ipotesi del criterio di Leibniz. Ovviamente abbiamo $a_n > 0$. Inoltre, per i calcoli del punto precedente, abbiamo anche: $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$. Rimane da dimostrare che a_n sia definitivamente decrescente. A questo scopo basta provare che la funzione

$$f(x) := \frac{\sqrt{x}}{3x - 2\log x}$$

abbia derivata definitivamente negativa per $x \to +\infty$. Infatti si ha

$$f'(x) = \frac{-3x - 2\log x + 4}{2\sqrt{x}[3x - 2\log x]^2} < 0 \qquad \text{(almeno) per} \quad x > \frac{4}{3}.$$

In conclusione: tutte le ipotesi del criterio di Leibniz sono verificate e quindi la serie converge semplicemente.



y
$y = 2x$
$f(\frac{\log 3}{2})$
x
$\frac{\log 3}{2}$
$y = -2$

ANALISI MATEMATICA 1

Commissione V. Casarino, P. Mannucci, C. Marchi

Ingegneria Gestionale, Meccanica-Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 24 Febbraio 2012

TEMA 1

Esercizio 1 (9 punti). Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\right)$$

(a) Determinare il dominio di f, eventuali simmetrie, periodicità e segno.

(b) Determinare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti di f.

(c) Studiare la continuità e la derivabilità di f; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f.

(d) Studiare la convessità e determinare gli eventuali flessi.

(e) Disegnare un grafico qualitativo di f in tutto il dominio.

Facoltativo: Individuare il più grande intervallo contenente 0 in cui la funzione è invertibile; individuare la funzione inversa ed il suo dominio.

Esercizio 2. (8 punti)

(a) Calcolare una primitiva di

$$f(x) = \frac{1}{x^3}\arctan(\frac{2}{x}).$$

(b) Dire se l'integrale generalizzato $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge e in caso affermativo calcolarlo.

Esercizio 3 (7 punti)

(a) Stabilire per quali $\alpha > 0$, la successione $a_k = \tan\frac{1}{k} - \sin\frac{1}{k^\alpha}$ converge per $k \to +\infty$.

(b) Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

al variare di $\alpha > 0$.

Esercizio 4 (7 punti). Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \log\Big(y\log(x-1)\Big).$$

(a) Trovare e disegnare in $\mathbb{R}^2$ il dominio di definizione. Dire se è aperto, chiuso, né aperto né chiuso.

(b) Calcolare il piano tangente al grafico in $(e+1, 1)$.

Tempo: **due ore e mezza**. Motivare tutte le risposte

N.B. Le parti facoltative vanno fatte dopo aver fatto le altri parti e non servono per ottenere l'ammissione all'orale.

N.B. Chi è sorpreso a parlare o copiare non solo verrà allontanato dall'aula ma non potrà sostenere l' appello successivo a questo.

ANALISI MATEMATICA 1

Commissione V. Casarino, P. Mannucci, C. Marchi

Ingegneria Gestionale, Meccanica-Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 24 Febbraio 2012

TEMA 2

Esercizio 1 (9 punti). Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{e^{3x}}{e^{3x}+1}\right)$$

(a) Determinare il dominio di f, eventuali simmetrie, periodicità e segno.

(b) Determinare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti di f.

(c) Studiare la continuità e la derivabilità di f; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f.

(d) Studiare la convessità e determinare gli eventuali flessi.

(e) Disegnare un grafico qualitativo di f in tutto il dominio.

Facoltativo: Individuare il più grande intervallo contenente 0 in cui la funzione è invertibile; individuare la funzione inversa ed il suo dominio.

Esercizio 2. (8 punti)

(a) Calcolare una primitiva di

$$f(x) = \frac{2}{x^3}\arctan(\frac{1}{x}).$$

(b) Dire se l'integrale generalizzato $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge e in caso affermativo calcolarlo.

Esercizio 3 (7 punti)

(a) Stabilire per quali $\beta > 0$ la successione $a_k = \sin\frac{1}{k^\beta} - e^{1/k} + 1$ converge per $k \to +\infty$.

(b) Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

al variare di $\beta > 0$.

Esercizio 4 (7 punti). Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \log\Big((y-2)\log x\Big).$$

(a) Trovare e disegnare in $\mathbb{R}^2$ il dominio di definizione. Dire se è aperto, chiuso, né aperto né chiuso.

(b) Calcolare il piano tangente al grafico in $(e,3)$.

Tempo: **due ore e mezza**. Motivare tutte le risposte

N.B. Le parti facoltative vanno fatte dopo aver fatto le altri parti e non servono per ottenere l'ammissione all'orale.

N.B. Chi è sorpreso a parlare o copiare non solo verrà allontanato dall'aula ma non potrà sostenere l' appello successivo a questo.

ANALISI MATEMATICA 1

Commissione V. Casarino, P. Mannucci, C. Marchi

Ingegneria Gestionale, Meccanica-Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 24 Febbraio 2012

TEMA 3

Esercizio 1 (9 punti). Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{e^{2x}}{e^{2x}+2}\right)$$

(a) Determinare il dominio di f, eventuali simmetrie, periodicità e segno.

(b) Determinare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti di f.

(c) Studiare la continuità e la derivabilità di f; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f.

(d) Studiare la convessità e determinare gli eventuali flessi.

(e) Disegnare un grafico qualitativo di f in tutto il dominio.

Facoltativo: Individuare il più grande intervallo contenente 0 in cui la funzione è invertibile; individuare la funzione inversa ed il suo dominio.

Esercizio 2. (8 punti)

(a) Calcolare una primitiva di

$$f(x) = \frac{1}{x^3}\arctan(\frac{3}{x}).$$

(b) Dire se l'integrale generalizzato $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge e in caso affermativo calcolarlo.

Esercizio 3 (7 punti)

(a) Stabilire per quali $\alpha > 0$ la successione $a_k = \sin\frac{1}{k} - \sinh\frac{1}{k^\alpha}$ converge per $k \to +\infty$.

(b) Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

al variare di $\alpha > 0$.

Esercizio 4 (7 punti) Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \log\Big(x\log(y-1)\Big).$$

(a) Trovare e disegnare in $\mathbb{R}^2$ il dominio di definizione. Dire se è aperto, chiuso, né aperto né chiuso.

(b) Calcolare il piano tangente al grafico in $(1, e+1)$.

Tempo: **due ore e mezza**. Motivare tutte le risposte

N.B. Le parti facoltative vanno fatte dopo aver fatto le altri parti e non servono per ottenere l'ammissione all'orale.

N.B. Chi è sorpreso a parlare o copiare non solo verrà allontanato dall'aula ma non potrà sostenere l' appello successivo a questo.

ANALISI MATEMATICA 1

Commissione V. Casarino, P. Mannucci, C. Marchi
Ingegneria Gestionale, Meccanica-Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 24 Febbraio 2012

TEMA 4

Esercizio 1 (9 punti). Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{e^{3x}}{e^{3x}+2}\right)$$

(a) Determinare il dominio di f, eventuali simmetrie, periodicità e segno.

(b) Determinare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti di f.

(c) Studiare la continuità e la derivabilità di f; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f.

(d) Studiare la convessità e determinare gli eventuali flessi.

(e) Disegnare un grafico qualitativo di f in tutto il dominio.

Facoltativo: Individuare il più grande intervallo contenente 0 in cui la funzione è invertibile; individuare la funzione inversa ed il suo dominio.

Esercizio 2. (8 punti)

(a) Calcolare una primitiva di

$$f(x) = \frac{3}{x^3}\arctan(\frac{1}{x}).$$

(b) Dire se l'integrale generalizzato $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ converge e in caso affermativo calcolarlo.

Esercizio 3 (7 punti)

(a) Stabilire per quali $\beta > 0$ la successione $a_k = e^{1/k^\beta} - 1 - \sin\frac{1}{k}$ converge per $k \to +\infty$.

(b) Studiare il carattere della serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

al variare di $\beta > 0$.

Esercizio 4 (7 punti) Si consideri la funzione

$$f(x, y) = \log\Big((x-2)\log y\Big).$$

(a) Trovare e disegnare in $\mathbb{R}^2$ il dominio di definizione. Dire se è aperto, chiuso, né aperto né chiuso.

(b) Calcolare il piano tangente al grafico in $(3, e)$.

Tempo: **due ore e mezza**. Motivare tutte le risposte

N.B. Le parti facoltative vanno fatte dopo aver fatto le altri parti e non servono per ottenere l'ammissione all'orale.

N.B. Chi è sorpreso a parlare o copiare non solo verrà allontanato dall'aula ma non potrà sostenere l' appello successivo a questo.

ANALISI MATEMATICA 1

Commissione V. Casarino, P. Mannucci, C. Marchi
Ingegneria Gestionale, Meccanica-Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 24 Febbraio 2012

Soluzioni del tema 1

Esercizio 1

(a) $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{R}$; infatti arctan è definita su tutto $\mathbb{R}$ e $e^{2x} + 1 \neq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

La funzione non presenta simmetrie né evidenti periodicità.

Segno: $f(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$. Infatti $f > 0$ equivale a $\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1} > 0$ e quest'ultima è sempre verificata.

(b) Si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \arctan 1 = \pi/4, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \arctan 0 = 0$$

perché arctan è continua e perché $(\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}) \to 1$ e $\to 0$ rispettivamente per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$.

Ne deduciamo che le rette $y = \pi/4$ e $y = 0$ sono rispettivamente l'asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ e per $x \to -\infty$.

(c) La funzione è continua sul suo dominio, come conseguenza dei teoremi sulla somma, la composizione e il quoziente di funzioni continue. La funzione è anche derivabile nei punti del suo dominio, come conseguenza dei teoremi sulla somma, la composizione e il quoziente di funzioni derivabili.

Risulta poi

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}\right)^2} \frac{2e^{2x}(e^{2x}+1) - e^{2x}(2e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{2e^{2x}}{2e^{4x} + 2e^{2x} + 1}.$$

Ne segue che $f' > 0$ su $\mathbb{R}$. Quindi la funzione f è sempre strettamente crescente e non presenta punti di massimo o minimo nè relativi nè assoluti.

(Si osservi che a questa conclusione si può giungere osservando che $f(x) \equiv \arctan(1 - \frac{1}{e^{2x}+1})$ è la composizione di funzioni strettamente crescenti).

Non richiesto: per il teorema di monotonia si evince facilmente che $\inf(f) = 0$, $\sup(f) = \pi/4$.

(d) Risulta

$$f''(x) = \frac{4e^{2x}(2e^{4x} + 2e^{2x} + 1) - 2e^{2x}(8e^{4x} + 4e^{2x})}{[2e^{4x} + 2e^{2x} + 1]^2} = \frac{4e^{2x}}{[2e^{4x} + 2e^{2x} + 1]^2}\left(-2e^{4x} + 1\right).$$

Ne segue che lo studio di $f'' > 0$ equivale a quello di $-2e^{4x} + 1 > 0$. Quindi abbiamo $f'' > 0$ per $x < -\frac{\ln 2}{4}$, $f'' < 0$ per $x > -\frac{\ln 2}{4}$ e $f''(-\frac{\ln 2}{4}) = 0$.

La funzione è convessa su $(-\infty, -\frac{\ln 2}{4})$, concava su $(-\frac{\ln 2}{4}, +\infty)$ e presenta un flesso in $-\frac{\ln 2}{4}$ (*non richiesto*: con coefficiente angolare della tangente pari a $1/(\sqrt{2}+1)$).

`Domanda facoltativa.` Essendo strettamente crescente, f è invertibile sul suo dominio. Denotiamo g la sua inversa, cioè $g = f^{-1}$. Abbiamo: $\mathrm{dom}(g) = \mathrm{Im}(f) = (0, \pi/4)$.

Ricordiamo che si costruisce la funzione inversa tramite la relazione "$g(y) = x''$ se e solo se $f(x) = y$. Osserviamo che $\arctan(\dots) = y$ se e solo se $(\dots) = \tan y$ se e solo se $(1 - \tan y)e^{2x} = \tan y$ se e solo se $e^{2x} = \frac{\tan y}{1-\tan y}$ se e solo se $x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{\tan y}{1-\tan y}\right)$. Pertanto abbiamo $g(y) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{\tan y}{1-\tan y}\right)$.

Esercizio 2

a) Con la sostituzione $y = 2/x$, poiché $dy = -\frac{2}{x^2}dx$, l'integrale diventa:

$$\int \frac{1}{x^3}\arctan\frac{2}{x}\,dx = -\frac{1}{4}\int y\arctan y\,dy.$$

Integrando per parti prendendo y come fattore integrante:

$$\int y\arctan y\,dy = \frac{y^2}{2}\arctan y - \int \frac{y^2}{2}\frac{1}{1+y^2}dy = \frac{y^2}{2}\arctan y - \frac{1}{2}\int \frac{y^2+1-1}{1+y^2}dy$$

Dividiamo ora il numeratore per il denominatore e otteniamo:

$$\frac{y^2}{2}\arctan y - \frac{1}{2}\int 1dy + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+y^2}dy = \frac{y^2}{2}\arctan y - \frac{y}{2} + \frac{1}{2}\arctan y.$$

Ritornando alla variabile x e tenendo conto del fattore $-1/4$ a moltiplicare si ha che una primitiva di f(x) è $G(x) = -\frac{1}{2x^2}\arctan\frac{2}{x} + \frac{1}{4x} - \frac{1}{8}\arctan\frac{2}{x}$

b) Poiché $\arctan y \sim y$ se $y \to 0$, si ha che, per $x \to +\infty$ $f(x) = \frac{1}{x^3}\arctan\frac{2}{x} \sim \frac{1}{x^3}\frac{2}{x} = \frac{2}{x^4}$. Quindi per il principio del confronto asintotico $f(x)$ è asintotica ad un funzione che è integrabile in $(1, +\infty)$ e quindi è integrabile. Per calcolare l'integrale, si usa la definizione di integrale generalizzato:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\arctan\frac{2}{x}\,dx = \lim_{K\to+\infty}\int_1^K \frac{1}{x^3}\arctan\frac{2}{x}\,dx = \lim_{K\to+\infty} G(K) - G(1)$$

dove $G(x)$ è la primitiva trovata sopra al punto a). Quindi si ottiene

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\arctan\frac{2}{x}\,dx = \lim_{K\to+\infty} -\frac{1}{2K^2}\arctan\frac{2}{K} + \frac{1}{4K} - 1\frac{1}{8}\arctan\frac{2}{K} - 1 + \frac{5}{8}\arctan 2 = \frac{5}{8}\arctan 2 - 1.$$

Esercizio 3

(a) Dalle stime asintotiche $\sin x \sim x$ e $\tan x \sim x$ per $x \to 0$ e dal fatto che $\frac{1}{k^\alpha} \to 0$ per $k \to +\infty$, per ogni valore di $\alpha > 0$, è immediato dedurre che la successione a_k converge a 0 per $k \to +\infty$, per ogni $\alpha > 0$.

(b) Osserviamo che se $\alpha \in (0, 1)$, allora $\tan\frac{1}{k} - \sin\frac{1}{k^\alpha} \sim -\frac{1}{k^\alpha}$, perché

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{\tan\frac{1}{k} - \sin\frac{1}{k^\alpha}}{\frac{1}{k^\alpha}} = \lim_{t\to0}\frac{\tan t - \sin t^\alpha}{t^\alpha} = \lim_{t\to0}(t^{1-\alpha} - 1) = -1\,.$$

Dal confronto con la serie armonica generalizzata si deduce allora che la serie data non converge se $\alpha \in (0, 1)$.

Se $\alpha > 1$, si ha $\tan\frac{1}{k} - \sin\frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{k}$, perché

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\tan\frac{1}{k} - \sin\frac{1}{k^\alpha}}{\frac{1}{k}} = \lim_{t\to 0} \frac{\tan t - \sin t^\alpha}{t} = \lim_{t\to 0}(1 - t^{\alpha-1}) = 1\,.$$

Anche in questo caso, dal confronto con la serie armonica generalizzata si deduce allora che la serie data non converge se $\alpha > 1$.

Infine, se $\alpha = 1$, dagli sviluppi elementari si ottiene

$$\tan\frac{1}{k} - \sin\frac{1}{k} = \frac{1}{k} + \frac{1}{3k^3} - \frac{1}{k} + \frac{1}{3!k^3} + o(\frac{1}{k^3}) = \big(\frac{1}{3} + \frac{1}{3!}\big)\frac{1}{k^3} + o(\frac{1}{k^3})$$

per $k \to +\infty$. Dal confronto con la serie armonica generalizzata si deduce in questo caso che la serie data converge se $\alpha = 1$.

Esercizio 4

a) Il dominio di $f(x,y)$ è il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ formato da tutte le coppie del piano tali che $x > 1$ e $y\log(x-1) > 0$. La seconda disuguaglianza porta a trovare i punti

$$\begin{cases} y > 0 \\ x > 2 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} y < 0 \\ x < 2 \end{cases}$$

quindi si ottiene che il dominio è $D = D_1 \cup D_2$ dove $D_1 = \{(x,y) : x > 2 \text{ } e \text{ } y > 0\}$ e $D_2 = \{(x,y) : 1 < x < 2 \text{ } e \text{ } y < 0\}$.

Il dominio è l'unione di due insieme aperti quindi è aperto.

b) L'equazione del piano tangente al grafico di f in $(e+1,1)$ si ottiene dalla formula:

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

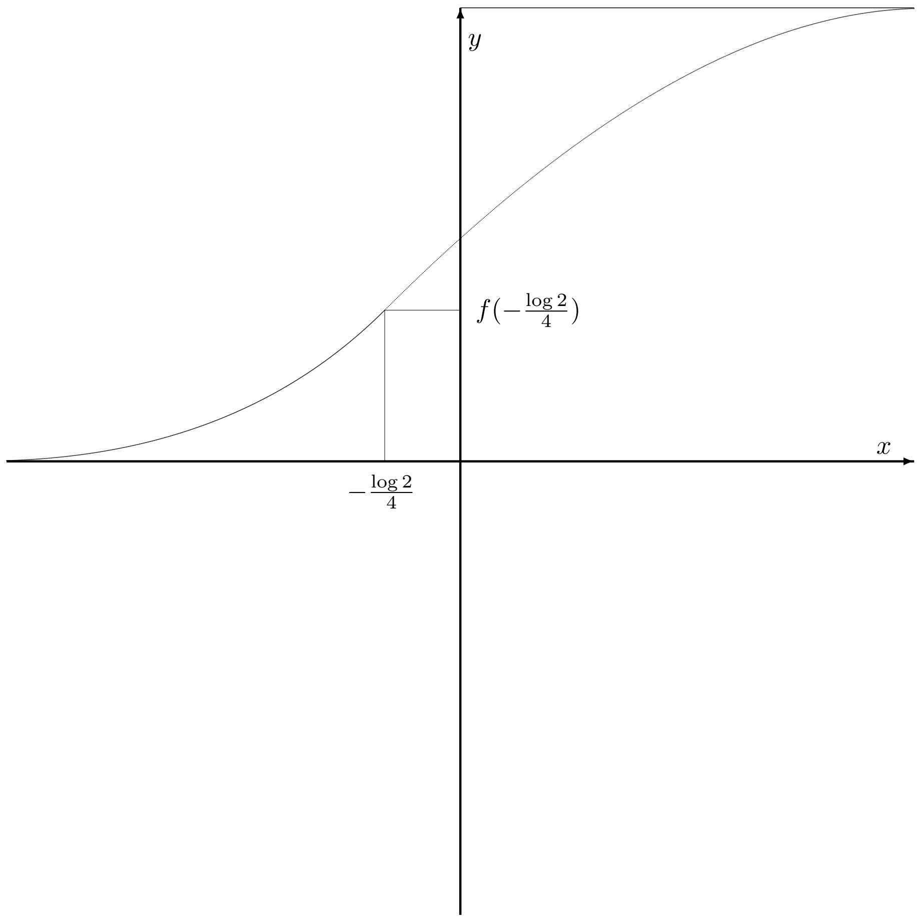
Si ha che $f(e+1,1) = 0$.

Calcoliamoci le derivate parziali di f:

$$f_x(x,y) = \frac{1}{y\log(x-1)}\frac{y}{x-1},\ \ f_y(x,y) = \frac{1}{y\log(x-1)}\log(x-1) = \frac{1}{y}.$$

Calcolate in $(e+1,1)$ si ha $f_x(e+1,1) = \frac{1}{e}$, $f_y(e+1,1) = 1$, da cui otteniamo l'equazione del piano tangente cercata:

$$z = \frac{1}{e}(x - e - 1) + y - 1 = \frac{x}{e} + y - 2 - \frac{1}{e}.$$



y
x
$f(-\frac{\log 2}{4})$
$-\frac{\log 2}{4}$

ANALISI MATEMATICA 1

Commissione V. Casarino, P. Mannucci, C. Marchi

Ingegneria Gestionale, Meccanica-Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 10 Luglio 2012

TEMA 1

Esercizio 1 (9 punti)

Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{\arctan|x^2-1|}$$

(a) Determinare il dominio di f, eventuali simmetrie, periodicità e segno della funzione.

(b) Determinare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti di f.

(c) Studiare la continuità e la derivabilità di f; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f.

(d) Calcolare i limiti di f', se significativi.

(e) Disegnare un grafico qualitativo di f in tutto il dominio.

Facoltativo: Studiare la convessità di f sull'intervallo $(1, +\infty)$ e determinare gli eventuali flessi.

Esercizio 2 (8 punti).

(a) Determinare il dominio della funzione

$$f(x) = \frac{4 + \log x}{x(9 - \log^2 x)}$$

e dedurne il massimo intervallo contenente $x_0 = 2$ sul quale la funzione è definita.

(b) Calcolare tutte le primitive di f su tale intervallo.

Esercizio 3 (8 punti). Si consideri la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{n} - \log(1 + \frac{2}{n})\right)\frac{1}{n^{\alpha}}.$$

(a) Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il termine n−esimo della serie a_n tende a zero.

(b) Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie converge.

Esercizio 4 (6 punti). Si consideri la funzione

$$g(x, y) = e^{2x \log y}$$

.

(a) Determinare il dominio di definizione di g e disegnarlo nel piano cartesiano.

(b) Calcolare le derivate parziali prime di g.

(c) Calcolare le derivate direzionali di g nel punto $(1, 1)$ nella generica direzione $\mathbf{v} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, $\alpha \in [0, 2\pi)$.

Tempo: **due ore e mezza**. Motivare tutte le risposte

N.B. Le parti facoltative vanno svolte dopo aver completato le altri parti e non servono per ottenere l'ammissione all'orale.

N.B. Chi è sorpreso a parlare o copiare non solo verrà allontanato dall'aula ma non potrà sostenere l' appello successivo a questo.

ANALISI MATEMATICA 1

Commissione V. Casarino, P. Mannucci, C. Marchi

Ingegneria Gestionale, Meccanica-Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 10 Luglio 2012

TEMA 2

Esercizio 1 (9 punti)
Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{\arctan|x^2-4|}$$

(a) Determinare il dominio di f, eventuali simmetrie, periodicità e segno della funzione.

(b) Determinare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti di f.

(c) Studiare la continuità e la derivabilità di f; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f.

(d) Calcolare i limiti di f', se significativi.

(e) Disegnare un grafico qualitativo di f in tutto il dominio.

Facoltativo: studiare la convessità di f sull'intervallo $(2, +\infty)$ e determinare gli eventuali flessi.

Esercizio 2 (8 punti).

(a) Determinare il dominio della funzione

$$f(x) = \frac{3 + \log x}{x(16 - \log^2 x)}$$

e dedurne il massimo intervallo contenente $x_0 = 3$ sul quale la funzione è definita.

(b) Calcolare tutte le primitive di f su tale intervallo.

Esercizio 3 (8 punti). Si consideri la serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\frac{3}{n} - \log(1 + \frac{3}{n})\Big)\frac{1}{n^\alpha}.$$

(a) Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ il termine $n-$esimo della serie a_n tende a zero.

(b) Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie converge.

Esercizio 4 (6 punti). Si consideri la funzione

$$g(x, y) = e^{2y \log x}$$

.

(a) Determinare il dominio di definizione di g e disegnarlo nel piano cartesiano.

(b) Calcolare le derivate parziali prime di g.

(c) Calcolare le derivate direzionali di g nel punto $(2, 2)$ nella generica direzione $\mathbf{v} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, $\alpha \in [0, 2\pi)$.

Tempo: **due ore e mezza**. Motivare tutte le risposte

N.B. Le parti facoltative vanno svolte dopo aver completato le altri parti e non servono per ottenere l'ammissione all'orale.

N.B. Chi è sorpreso a parlare o copiare non solo verrà allontanato dall'aula ma non potrà sostenere l' appello successivo a questo.

ANALISI MATEMATICA 1

Commissione V. Casarino, P. Mannucci, C. Marchi

Ingegneria Gestionale, Meccanica-Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 10 Luglio 2012

Soluzioni del tema 1

Esercizio 1

$$f(x) = e^{\arctan|x^2-1|}$$

(a) Il dominio di f è tutto $\mathbb{R}$. Inoltre, poiché $f(x) = f(-x)$, la funzione è pari, cioè simmetrica rispetto all'asse delle ordinate. La funzione, essendo un esponenziale, è sempre positiva e inoltre, poiché l'argomento dell'esponente è sempre maggiore o uguale a zero, si ha che $f(x) \geq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Inoltre $f(\pm 1) = 1$ quindi $x = \pm 1$ sono i punti di minimo assoluto e $f = 1$ è il minimo assoluto. Per la simmetria della funzione, studiamola per $x \geq 0$ e di conseguenza otterremo le informazioni anche per gli $x < 0$.

(b) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = e^{\pi/2}$ quindi $y = e^{\pi/2}$ è un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$. Inoltre, poiché $\arctan() < \pi/2$ si ha che $f(x) < e^{\pi/2}$, quindi $f(x)$ tende a $e^{\pi/2}$ "da sotto".

(c) La funzione è continua su $\mathbb{R}$ perché composizione di funzioni continue. Per studiarne la derivata prima conviene spezzare la funzione per $x > 1$ e per $0 < x < 1$. Per $x > 1$ si ha $f(x) = e^{\arctan(x^2-1)}$ da cui $f'(x) = e^{\arctan(x^2-1)} \frac{1}{1+(x^2-1)^2} 2x$. Quindi, poiché stiamo considerando gli $x > 1$ si ha che $f' > 0$ cioè f è strettamente crescente per ogni $x > 1$. Per $0 < x < 1$ si ha $f(x) = e^{\arctan(1-x^2)}$ da cui $f'(x) = e^{\arctan(1-x^2)} \frac{1}{1+(1-x^2)^2}(-2x)$. Quindi, poiché stiamo considerando gli $0 < x < 1$ si ha che $f' < 0$ cioè f è strettamente decrescente per ogni $0 < x < 1$. Inoltre abbiamo già osservato in a) che $x = 1$ è un punto di minimo assoluto. Nel punto $x = 0$ f è derivabile. Inoltre f è strettamente decrescente a destra di 0 ed è simmetrica, $f(0) = e^{\pi/4}$, quindi $x = 0$ è un punto di massimo relativo.

(d) Dall'espressione della derivata prima di f trovata in c) si ha che $f'_+(1) = \lim_{x\to1^+} f'(x) = 2$ e $f'_-(1) = \lim_{x\to1^-} f'(x) = -2$ quindi f non è derivabile in $x = 1$ e $x = 1$ è un punto spigoloso. Una volta ottenute tutte queste informazioni si può disegnare il grafico per $x > 0$ e poi disegnare la curva simmetrica rispetto all'asse delle y ottenendo così il grafico di $f(x)$.

Facoltativo: Derivando l'espressione di f' per $x > 1$ si ottiene $f''(x) = e^{\arctan(x^2-1)} \frac{2}{(1+(x^2-1)^2)^2}(-3x^4 + 2 + 4x^2)$. Poiché la funzione è due volte derivabile per $x > 1$ i possibili flessi si trovano cercando gli zeri di f'', ciè risolvendo $-3x^4 + 2 + 4x^2 = 0$. Ponendo $x^2 = y$ si ha $3y^2 - 4y - 2 = 0$ da cui $x^2 = \frac{2+\sqrt{10}}{3}$. Quindi c'è un flesso per $x > 1$ in $x_0 = \sqrt{\frac{2+\sqrt{10}}{3}}$ e la funzione è concava a destra di tale punto e convessa per $1 < x < x_0$.

Esercizio 2

(a) Il dominio della funzione

$$f(x) = \frac{4 + \log x}{x(9 - \log^2 x)}$$

si ottiene imponendo $x > 0$ (in quanto x è argomento del logaritmo) e la condizione $\log^2 x \neq 9$, cioè $\log x \neq \pm 3$, cioè ancora $x \neq e^{\pm 3}$. Risulta quindi

$$\text{dom} f := \{x > 0 \,:\, x \neq e^{\pm 3}\} = (0, e^{-3}) \cup (e^{-3}, e^3) \cup (e^3, +\infty)\,.$$

Ciò implica che il più grande intervallo contenente $x_0 = 2$ sul quale la funzione è definita sia (e^{-3}, e^3).

(b) Calcoliamo l'integrale indefinito

$$I := \int \frac{4 + \log x}{x(9 - \log^2 x)}\, dx$$

imponendo la sostituzione $\log x = t$. Otteniamo

$$I = \int \frac{4+t}{9-t^2} dt = \int \frac{3+t+1}{(3+t)(3-t)} dt = \int \frac{1}{3-t} dt + \int \frac{1}{(3+t)(3-t)} dt$$

$$= -\log|3-t| + C + \int \frac{1}{(3+t)(3-t)}dt\,.$$

Per calcolare quest'ultimo integrale, applichiamo il metodo dei fratti semplici, ottenendo

$$\int \frac{1}{(3+t)(3-t)}dt = \frac{1}{6}\int \frac{1}{3+t}dt + \frac{1}{6}\int \frac{1}{3-t}dt = \frac{1}{6}\log|3+t| - \frac{1}{6}\log|3-t| + C\,.$$

Si ha quindi

$$I = -\log|3-t| + \frac{1}{6}\log|3+t| - \frac{1}{6}\log|3-t| + C = \frac{1}{6}\log|3+t| - \frac{7}{6}\log|3-t| + C$$

$$= \frac{1}{6}\log|3+\log x| - \frac{7}{6}\log|3-\log x| + C\,.$$

Concludiamo osservando che sull'intervallo (e^{-3}, e^{3}) l'insieme delle primitive di f si può scrivere come

$$I = \frac{1}{6}\log(3+\log x) - \frac{7}{6}\log(3-\log x) + C\,.$$

Esercizio 3

Per $\alpha \in \mathbb{R}$, si consideri

$$a_n = \Big(\frac{2}{n} - \log(1+\frac{2}{n})\Big)\frac{1}{n^\alpha}.$$

Usando lo sviluppo di Taylor della funzione $\log(1+x)$ di ordine 2 ($\log(1+x) = x - x^2/2 + o(|x|^2)$), otteniamo

$$\Big(\frac{2}{n} - \log(1+\frac{2}{n})\Big) \sim \frac{2}{n^2} \qquad \text{per } n \to +\infty$$

e quindi

$$a_n \sim \frac{2}{n^{\alpha+2}}.$$

Ne deduciamo

(a) $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ se, e solo se, $\alpha > -2$;

(b) per il criterio del confronto asintotico, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente se $\alpha > -1$, divergente se $\alpha \leq -1$.

Esercizio 4

(a) Il dominio della funzione è dato da tutti i punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ove risulti definito "$\log y$" cioè è l'insieme

$$\mathrm{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \, y > 0\}.$$

(b) Le derivate parziali della funzione g sono

$$g_x(x, y) = (2\log y)e^{2x\log y}, \qquad g_y(x, y) = \frac{2x}{y}e^{2x\log y}.$$

(c) Per la formula del gradiente, la derivata direzionale della g nella direzione $\mathbf{v} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ è

$$D_{\mathbf{v}}g(1, 1) = g_x(1, 1)\cos\alpha + g_y(1, 1)\sin\alpha = 2\sin\alpha.$$

ANALISI MATEMATICA 1 e MATEMATICA A

Commissione V. Casarino, P. Mannucci, C. Marchi
Ingegneria Gestionale, Meccanica-Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 18 Settembre 2012

TEMA 2

Esercizio 1 (9 punti). Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{3\log^2 x + 2\log x + 1}$$

(a) Determinare il dominio di f, il segno, eventuali simmetrie e periodicità.

(b) Determinare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti di f.

(c) Studiare la continuità e la derivabilità di f; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f.

(d) Calcolare i limiti di f', se significativi.

(d) Disegnare un grafico qualitativo di f in tutto il dominio.

(Non è richiesto lo studio della derivata seconda di $f(x)$).

Esercizio 2 (8 punti).

(a) Calcolare l'integrale definito

$$\int_4^5 \frac{1}{\sqrt{x}\,(x-3)}\,dx.$$

(b) Discutere la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x}\,(x-3)}\,dx\,.$$

Esercizio 3 (7 punti) Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^n}{(2n+1)!}$$

Esercizio 4 (7 punti) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x+x^2} - 1 - \log(1+x)}{\sin(x^2) + x^3 \log x}.$$

Tempo: **due ore e mezza**. Motivare tutte le risposte

N.B. Chi è sorpreso a parlare o copiare non solo verrà allontanato dall'aula ma non potrà sostenere l'appello successivo a questo.

ANALISI MATEMATICA 1

Commissione V. Casarino, P. Mannucci, C. Marchi

Ingegneria Gestionale, Meccanica-Meccatronica, Vicenza

Soluzioni del **TEMA 1**

Esercizio 1

(a) Si osservi che $f(x) = \frac{x^2}{g(x)}$, ove $g(x) = p(\log x)$ e $p(t) = 4t^2 + 2t + 1$. Poiché il polinomio $4t^2 + 2t + 1$ ha discriminante negativo, il denominatore di f non si annulla mai. Per la presenza della funzione $\log x$ risulta quindi

$$\mathrm{dom} f = \{x \in \mathbb{R} : \, x > 0\}.$$

La funzione non presenta simmetrie o periodicità ed è sempre positiva.

(b) Risulta

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

e

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty\,.$$

Non ha senso cercare eventuali asintoti obliqui per $x \to +\infty$, perché f tende a $+\infty$ con ordine maggiore di uno.

(c) La funzione è continua e derivabile su tutto il suo dominio come conseguenza dei teoremi sulla continuità e sulla derivabilità del quoziente e della composizione di funzioni. Risulta, inoltre,

$$f'(x) = \frac{8x\log^2 x - 4x\log x}{g^2(x)}\,.$$

La funzione risulta allora crescente sugli intervalli $(0, 1)$ e $(e^{1/2}, +\infty)$, decrescente in $(1, e^{1/2})$.

f presenta un massimo relativo in $x = 1$ (ove assume il valore 1) e un mnimo relativo in $e^{1/2}$, ove assume il valore $e/3$. La funzione non ha nè massimi nè minimi assoluti.

(d) Risulta

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{8x\log^2 x - 4x\log x}{g^2(x)} = 0\,.$$

Esercizio 2

(a). Per il calcolo dell'integrale definito, tramite la sostituzione $x = t^2$ (che implica "$dx = 2t\,dt$", $x = 3$ ed $x = 4$ da sostituire con $t = \sqrt{3}$ e $t = 2$ rispettivamente) otteniamo

$$I := \int_3^4 \frac{1}{(x-2)\sqrt{x}}\,dx = 2\int_{\sqrt{3}}^2 \frac{1}{t^2-2}\,dt.$$

Osserviamo che si ha $t^2 - 2 = (t-\sqrt{2})(t+\sqrt{2})$; inoltre l'equazione

$$\frac{A}{t-\sqrt{2}} + \frac{B}{t+\sqrt{2}} = \frac{1}{t^2-2}$$

implica: $A = \sqrt{2}/4$ e $B = -\sqrt{2}/4$. Abbiamo pertanto

$$\begin{aligned}
I &= 2\int_{\sqrt{3}}^2 \frac{1}{t^2-2}\,dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_{\sqrt{3}}^2 \left(\frac{1}{t-\sqrt{2}} - \frac{1}{t+\sqrt{2}}\right)dt \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\Big[\log|t-\sqrt{2}| - \log|t+\sqrt{2}|\Big]_{\sqrt{3}}^2 \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\log\left[\frac{(2-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}\right] = \frac{\sqrt{2}}{2}\log\left[\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})}\right].
\end{aligned}$$

(b). Essendo l'integranda continua solo su $(0,2)$, si deve studiare il suo comportamento sia intorno al punto $x = 0$ che al punto $x = 2$. Per il primo notiamo che

$$\frac{1}{(x-2)\sqrt{x}} \sim -\frac{1}{2}x^{-1/2} \qquad \text{per } x \to 0^+.$$

Per il criterio del confronto asintotico, l'integrale improprio converge.

Per $x = 2$ osserviamo

$$\frac{1}{(x-2)\sqrt{x}} \sim \frac{(x-2)^{-1}}{\sqrt{2}} \qquad \text{per } x \to 2^-.$$

Per il criterio del confronto asintotico, l'integrale improprio diverge.

(*In alternativa, si può usare il risultato del punto (a) e la definizione di integrale improprio:* $\int_0^2 \cdots = \lim_{\xi\to 0^+}\int_\xi^1 \cdots + \lim_{\eta\to 2^-}\int_1^\eta \ldots$ *dove il primo limite è convergente mentre il secondo è divergente.)*

Esercizio 3 Essendo una serie a termini positivi, si può provare ad usare il criterio del rapporto:

$$\begin{aligned}
\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(2(n+1)+1)!}{(n+1+1)^{n+1}}\frac{(n+1)^n}{(2n+1)!} = \frac{(2n+3)!}{(n+2)^{n+1}}\frac{(n+1)^n}{(2n+1)!} = \\
&= \frac{(2n+1)!(2n+2)(2n+3)}{(n+2)^n(n+2)}\frac{(n+1)^n}{(2n+1)!} = \frac{(2n+2)(2n+3)}{(n+2)}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n \\
&= \frac{(2n+2)(2n+3)}{(n+2)}\left(1-\frac{1}{n+2}\right)^n = \frac{(2n+2)(2n+3)}{(n+2)}\left[\left(1-\frac{1}{n+2}\right)^{n+2}\right]^{\frac{n}{n+2}} = \\
&= +\infty,
\end{aligned}$$

dove nel calcolo del limite si è tenuto conto che $\lim_n (1-\frac{1}{n+2})^{n+2} = e^{-1}$, $\lim_n \frac{n}{n+2} = 1$ e $\lim_n \frac{(2n+2)(2n+3)}{(n+2)} = +\infty$.

Quindi $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$ e, per il principio del rapporto, la serie diverge.

Esercizio 4

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x+x^2)-\sin x}{1-\cos x + x^4\log x}.$$

Scriviamo lo sviluppo di McLaurin del numeratore:

$$\log(1+x+x^2)-\sin x = (x+x^2) - \frac{1}{2}(x+x^2)^2 + \frac{1}{3}(x+x^2)^3 - x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3) = \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

per $x \to 0$.

Al denominatore:

$$1-\cos x + x^4\log x = \frac{x^2}{2} + o(x^2),$$

per $x \to 0$, dove abbiamo tenuto conto che $\lim_{x\to 0^+}\frac{x^4\log x}{x^2} = 0$ quindi $x^4 \log x = o(x^2)$. Quindi facendo il quoziente si ottiene che il limite è $= 1$.

Traccia di soluzione del Tema 1

Commissione A. Centomo, M. Motta

12 luglio 2011

Esercizio 1

Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{|x-3|}{x} + 1\right)$$

(a) Determinare il dominio di f, eventuali simmetrie e segno.

(b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare la funzione.

(c) Studiare la continuità e la derivabilità di f; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f. Calcolare i limiti di f', se significativi.

(d) Disegnare un grafico qualitativo di f in tutto il dominio.

Non è richiesto lo studio della convessità.

Soluzione. La funzione è definita in $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e possiamo riscriverla nella forma

$$f(x) = \begin{cases} \arctan\left(2 - \dfrac{3}{x}\right) & x \in (3, +\infty) \\ \dfrac{\pi}{4} & x = 3 \\ \arctan\left(\dfrac{3}{x}\right) & x \in (-\infty, 0) \cup (0, 3). \end{cases}$$

La funzione non presenta simmetrie e

$$\begin{array}{ll} f(x) > 0 & x \in (0, +\infty) \\ f(x) < 0 & x \in (-\infty, 0). \end{array}$$

I limiti agli estremi del dominio sono

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \arctan 2 \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = -\frac{\pi}{2}$$

da cui possiamo concludere che

a) la retta $y = \arctan 2$ è asintoto orizzontale destro;

b) la retta $y = 0$ è asintoto orizzontale sinistro;

c) la funzione non è prolungabile per continuità in $x = 0$.

La derivata prima di f è

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{5x^2 - 12x + 9} & x \in (3, +\infty) \\ -\dfrac{3}{x^2 + 9} & x \in (-\infty, 0) \cup (0, 3). \end{cases}$$

Lo studio del segno della derivata prima è immediato

$$\begin{array}{ll} f'(x) > 0 & x \in (3, +\infty) \\ f'(x) < 0 & x \in (-\infty, 0) \cup (0, 3) \end{array}$$

da cui possiamo concludere che:

1. $f(x)$ è monotona strettamente crescente in $(3,+\infty)$
2. $f(x)$ è monotona strettamente decrescente in $(-\infty,0)$ e in $(0,3)$
3. il punto $x=3$ è di minimo relativo
4. $f(x)$ non ammette massimo e minimo assoluto e $\sup f=\pi/2$ mentre $\inf f=-\pi/2$.

Per $x=3$ si ha

$$\lim_{x\to 3^+} f'(x)=\frac{1}{6} \qquad \lim_{x\to 3^-} f'(x)=-\frac{1}{6}$$

da cui possiamo conclude che $x=3$ è un punto angoloso.

Per determinare gli attacchi di f osserviamo che

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\arctan\left(\frac{3}{x}\right)-\frac{\pi}{2}}{x} = \lim_{z\to 0^+} \frac{\arctan\left(\frac{3}{z}\right)+\frac{\pi}{2}}{z} = \lim_{z\to 0^+} -\frac{3}{z^2+9} = -\frac{1}{3}.$$

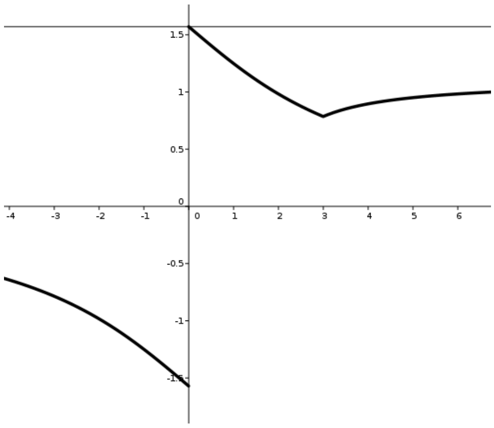


Figura 1. Grafico di f

Esercizio 2

Calcolare l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cosh x}{\sinh^2 x+|\sinh^2 x-4|+6}\,dx$$

Soluzione. Osserviamo che

$$|\sinh^2 x-4| = \begin{cases} \sinh^2 x-4 & x\in[\operatorname{settsinh} 2,+\infty) \\ 4-\sinh^2 x & x\in[0,\operatorname{settsinh} 2] \end{cases}$$

da cui

$$I=\int_0^{+\infty} \frac{\cosh x}{\sinh^2 x+|\sinh^2 x-4|+6}\,dx = \frac{1}{10}\int_0^{\operatorname{settsinh} 2} \cosh x\,dx + \frac{1}{2}\int_{\operatorname{settsinh} 2}^{+\infty} \frac{\cosh x}{\sinh^2 x+1}\,dx.$$

Utilizziamo la sostituzione $z=\sinh x$

$$I=\frac{1}{10}\int_0^2 dz+\frac{1}{2}\int_2^{+\infty}\frac{dz}{1+z^2}=\frac{1}{5}+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\arctan 2.$$

Esercizio 3

Calcolare il limite seguente

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^a+a^x+\sin(x^2)}{6e^x+\sqrt{x^6+2x+1}}$$

per ogni valore del parametro $a>0$.

Soluzione. Iniziamo dallo studio del denominatore osservando che

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{6e^x}{\sqrt{x^6+2x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6e^x}{x^3+o(x^3)}=+\infty.$$

Possiamo quindi calcolare il limite distinguendo i seguenti casi

i. $a>1$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^a+a^x+\sin(x^2)}{6e^x+\sqrt{x^6+2x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{a^x}{6e^x}$$

i cui valori sono

a) 0 se $1<a<e$,

b) $1/6$ se $a=e$

c) $+\infty$ se $a>e$

ii. $0<a\leq 1$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^a+a^x+\sin(x^2)}{6e^x+\sqrt{x^6+2x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^a}{6e^x}=0.$$

Esercizio 4

Si consideri la funzione

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(\sqrt{x^2+y^2})\log(1+x^2y^2)}{x} & \text{per}\quad x\neq 0\\ 0 & \text{per}\quad x=0\end{cases}$$

(a) Discutere la continuità di f in $(x,y)=(0,0)$.

(b) (Facoltativo) Discutere la derivabilità e la differenziabilità di f in $(x,y)=(0,0)$.

Soluzione. Osserviamo che per ogni $(x,y)\in\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon 0<\sqrt{x^2+y^2}\leq 1\}$ si ha

$$0\leq\frac{\sin(\sqrt{x^2+y^2})\log(1+x^2y^2)}{x}\leq\frac{\log(1+x^2y^2)}{x}\leq\frac{x^2y^2}{x}=xy^2$$

da cui, utilizzando il teorema del confronto, concludiamo che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0.$$

Quindi f è continua in $(0,0)$. Possiamo calcolare le derivate parziali di f nel punto $(0,0)$ ricorrendo alla definizione

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=0.$$

A questo punto calcoliamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}=\frac{\sin(\sqrt{x^2+y^2})\log(1+x^2y^2)}{x\sqrt{x^2+y^2}}=0$$

da cui concludiamo che $f(x,y)=f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(x,y)+o(\|(x,y)\|)$ ossia che f è differenziabile in $(0,0)$.

Traccia di soluzione del Tema 1

di A. Centomo & M. Motta

24 febbraio 2011

Esercizio 1

Si consideri la funzione

$$f(x) = 2\log(\cosh(3x)) - 6x$$

(a) Determinare il dominio di f ed eventuali simmetrie. Non è richiesto lo studio del segno di f.

(b) Determinare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti di f.

(c) Studiare la continuità e la derivabilità di f; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f. Calcolare i limiti di f', se significativi.

(d) Disegnare un grafico qualitativo di f in tutto il dominio.

Non è richiesto lo studio della convessità.

Soluzione. (a) La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$. Osservato che

$$f(-x) = 2\log(\cosh(3x)) + 6x = f(x) + 12x$$

possiamo concludere che $f(x)$ non presenta simmetrie.

(b) Per calcolare i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti, osserviamo che possiamo riscrivere $f(x)$ nella forma

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\log\left(e^{3x} + e^{-3x}\right) - 2\log 2 - 6x \\ &= 2\log(e^{3x}(1 + e^{-6x})) - 2\log 2 - 6x \\ &= 2\log(1 + e^{-6x}) - 2\log 2 \end{aligned}$$

e anche

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\log\left(e^{3x} + e^{-3x}\right) - 2\log 2 - 6x \\ &= 2\log(e^{-3x}(e^{6x} + 1)) - 2\log 2 - 6x \\ &= 2\log(e^{6x} + 1) - 2\log 2 - 12x. \end{aligned}$$

Ora i limiti agli estremi del dominio sono

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -2\log 2 \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

da cui possiamo concludere che la retta di equazione $y = -2\log 2$ è asintoto orizzontale destro. Inoltre

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2\log(e^{6x} + 1) - 2\log 2 - 12x}{x} = -12$$

e

$$\lim_{x \to -\infty} \left[2\log(e^{6x} + 1) - 2\log 2 - 12x + 12x\right] = -2\log 2$$

da cui possiamo concludere che la retta di equazione $y = -12x - 2\log 2$ è asintoto obliquo sinistro.

(c) La funzione è continua e derivabile in $\mathbb{R}$ e la sua derivata prima è

$$f'(x) = 6\frac{\sinh(3x)}{\cosh(3x)} - 6 = 6(\tanh(3x) - 1)$$

oppure, usando la prima delle formulazioni equivalenti di f,

$$f'(x) = \frac{-12e^{-6x}}{1+e^{-6x}}$$

ed è sempre strettamente negativa (ricordiamo: $-1 < \tanh y < 1 \ \forall y \in \mathbb{R}$). In conclusione la funzione è monotona strettamente decrescente su tutto $\mathbb{R}$.

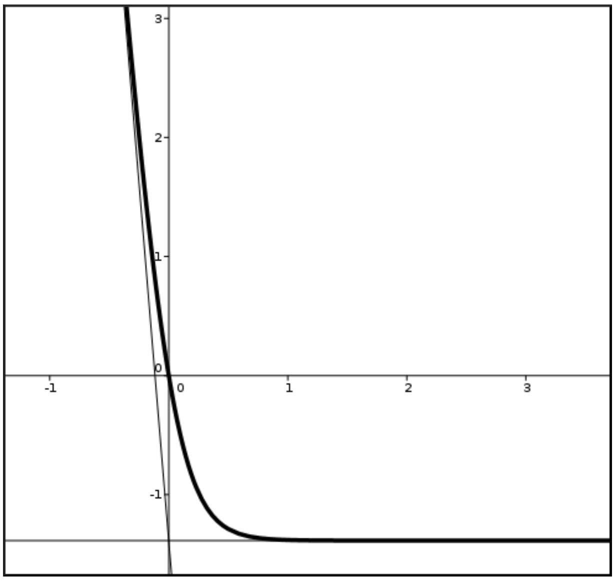


Figura 1. Grafico di f

Esercizio 2

Calcolare l'integrale

$$\int_0^2 \log\left[(2+x)^{4x}\right] d\,x.$$

Soluzione. Iniziamo osservando che

$$I = \int_0^2 \log\left[(2+x)^{4x}\right] d\,x = \int_0^2 4x \log(2+x) d\,x.$$

Ora, integrando per parti, si ha

$$\int_0^2 4x\log(2+x) d\,x = \left[2x^2 \log(2+x)\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{2x^2}{2+x} d\,x = 16\log 2 - \int_0^2 \frac{2x^2}{2+x} d\,x.$$

La funzione integranda dell'ultimo integrale è una funzione razionale e il grado del suo numeratore è maggiore di quello del denominatore. Quindi, ricorrendo all'algoritmo di divisione euclidea (Ruffini), si ha

$$2x^2 = (2x-4)(2+x) + 8$$

da cui

$$\int_0^2 \frac{2x^2}{2+x} d\,x = \int_0^2 (2x-4) d\,x + \int_0^2 \frac{8}{2+x} d\,x$$

e

$$\int_0^2 (2x-4) d\,x + \int_0^2 \frac{8}{2+x} d\,x = \left[x^2 - 4x\right]_0^2 + [8\log|2+x|]_0^2 = -4 + 8\log 2.$$

In conclusione

$$I = 16\log 2 + 4 - 8\log 2 = 4 + 8\log 2.$$

Nota 1. Osserviamo che per risolvere l'esercizio non serviva conoscere l'algoritmo di divisione euclidea in quanto si ha anche la decomposizione

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2}{2+x}dx &= 2\int \frac{x^2+2x-2x}{2+x}dx\\ &= 2\int \frac{x(2+x)}{2+x}dx - 4\int \frac{x+2-2}{2+x}dx\\ &= x^2-4x+8\log|x+2|+c\end{aligned}$$

con $c \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3

Posto

$$a_n = \frac{\sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{n^2+2n-1}}{(3n+6)} \cdot \frac{1}{n^{\left(a-\frac{1}{3}\right)}\log^{\frac{1}{2}}n},$$

(a) discutere la convergenza della serie $\sum_{n=2}^{+\infty} a_n$ per ogni valore $a \in \mathbb{R}$ del parametro;

(b) (Facoltativo) discutere la convergenza semplice della serie $\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n$ per ogni valore $a \geq 1/3$ del parametro.

Soluzione. (a) La serie è a termini positivi. Per $n \to \infty$ si ha

$$\frac{\sqrt{n^2+3n+1}-\sqrt{n^2+2n-1}}{(3n+6)} = \frac{1}{3(n+2)} \cdot \frac{n+2}{\sqrt{n^2+3n+1}+\sqrt{n^2+2n-1}} \sim \frac{1}{6n}.$$

e, nello stesso limite, $a_n \sim b_n$ con

$$b_n = \frac{1}{6n} \cdot \frac{1}{n^{\left(a-\frac{1}{3}\right)}\log^{\frac{1}{2}}n} = \frac{1}{6n^{\left(a+\frac{2}{3}\right)}\log^{\frac{1}{2}}n}$$

Quindi la serie converge se

$$a+\frac{2}{3}>1 \qquad \Leftrightarrow \qquad a>\frac{1}{3}$$

e diverge se $a \leq 1/3$.

(b) La serie a termini di segno alterno converge assolutamente e quindi anche semplicemente per $a > 1/3$. Per $a = 1/3$ la serie non converge assolutamente ma semplicemente per il criterio di Leibnitz (o delle serie a segni alterni). Infatti a_n è infinitesima, per quanto visto al punto (a), e decrescente perchè a denominatore $3(\sqrt{n^2+3n+1}+\sqrt{n^2+2n-1})\log^{\frac{1}{2}}n$ è chiaramente prodotto di successioni positive crescenti e quindi crescente, per cui il reciproco è decrescente.

Esercizio 4

a) Calcolare al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$ il limite

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{3\arctan x - 3a^2x - a\,x^3}{3\sin^3 x - x^4}.$$

b) Determinare i valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3\arctan x - 3a^2x - a\,x^3}{3\sin^3 x - x^4} & x \in (0,1] \\ 3x^2\sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right) & x \in [-1,0) \end{cases}$$

risulta prolungabile per continuità in $x=0$.

Soluzione. (a) Posto

$$f_a(x) = \frac{3\arctan x - 3a^2 x - a\,x^3}{3\sin^3 x - x^4}$$

osserviamo che, per $x \to 0^+$, il numeratore si può scrivere come

$$3\arctan x - 3a^2 x - a\,x^3 = 3x - x^3 - 3a^2 x - a\,x^3 + \frac{3}{5}x^5 + o(x^6)$$

e quindi si hanno i seguenti casi:

i. $a = -1$, $f_a(x) = \frac{3}{5}x^5 + o(x^6)$;

ii. $a = 1$, $f_a(x) = -2x^3 + o(x^4)$;

iii. $a \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$, $f_a(x) = 3(1 - a^2)x + o(x^2)$.

Il denominatore si può scrivere come

$$3\sin^3 x - x^4 = 3x^3 + o(x^3).$$

Possiamo adesso calcolare il limite iniziale nei tre casi:

1. $a = -1$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{3}{5}x^5 + o(x^6)}{3x^3 + o(x^3)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{3}{5}x^2 + o(x^3)}{3 + o(1)} = 0$$

2. $a = 1$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{-2x^3 + o(x^4)}{3x^3 + o(x^3)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-2 + o(x)}{3 + o(1)} = -\frac{2}{3}$$

3. $a \in \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{3(1 - a^2)x + o(x^2)}{3x^3 + o(x^3)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{(1 - a^2) + o(x)}{x^2 + o(x^2)}.$$

Per concludere notiamo che

4. se $1 - a^2 > 0$ ossia se $a \in (-1, 1)$ si ha

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{(1 - a^2) + o(x)}{x^2 + o(x^2)} = +\infty$$

5. se $1 - a^2 < 0$ ossia se $a \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$ si ha

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{(1 - a^2) + o(x)}{x^2 + o(x^2)} = -\infty.$$

(b) Dopo quanto discusso in precedenza, osservato che per $x \in [-1, 0)$, si ha

$$0 \leq 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq 3x^2$$

e che, per il teorema del confronto, si ha

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$$

si conclude immediatamente che $f(x)$ è prolungabile per continuità in $x = 0$ solo se $a = -1$.

Traccia di soluzione del Tema 1

Commissione A. Centomo, M. Motta

22 febbraio 2011

Esercizio 1

Si consideri la funzione

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{|\frac{1}{4}-\cos^2 x|}}$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie, periodicità e segno di f.

(b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare la funzione per continuità.

(c) Studiare la continuità e la derivabilità di f; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimi, minimi relativi e assoluti, inf e sup) di f. Calcolare i limiti di f', se significativi.

(d) Disegnare un grafico qualitativo di f in tutto il dominio.

Non è richiesto lo studio della convessità di f.
Soluzione. (a) La funzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{1}{4} - \cos^2(x) \neq 0.$$

Per risolvere in $\mathbb{R}$ l'equazione

$$\frac{1}{4} - \cos^2(x) = 0$$

osserviamo che la funzione $\cos^2(x)$ è periodica di periodo π e pari. Quindi è sufficiente determinare le soluzioni dell'equazione, ad esempio, nell'intervallo $[0, \pi/2]$ ottenendo $x = \pi/3$, aggiungere la soluzione simmetrica $x = -\pi/3$ e quindi estendere le soluzioni ottenute per periodicità. In conclusione, il dominio della funzione è

$$D = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x = \pm\pi/3 + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}.$$

La funzione è continua e positiva nel suo dominio. Inoltre $f : D \to \mathbb{R}$ si può scrivere nella forma

$$f(x) = 2^{-\frac{1}{|\frac{1}{4}-\cos^2 x|}}$$

e $f(-x) = f(x)$, $f(x+\pi) = f(x)$ per ogni $x \in D$, quindi $f(x)$ è pari e periodica di periodo π.
Per questo possiamo limitare il resto dello studio della funzione alla particolare restrizione all'insieme $D \cap [0, \pi/2] = [0, \pi/2] \setminus \{\pi/3\}$.
(b) Agli estremi di $[0, \pi/2] \setminus \{\pi/3\}$, per la continuità di f, si ha

$$f(0) = \frac{1}{2\sqrt[3]{2}} \qquad f(\pi/2) = \frac{1}{16},$$

e l'unico limite da calcolare è

$$\lim_{x\to\pi/3^+} f(x) = \lim_{x\to\pi/3^-} f(x) = 0$$

da cui possiamo dedurre che $f(x)$ è prolungabile per continuità su tutto $[0, \pi/2]$ ponendo $f(\pi/3) = 0$, anzi, su tutto $\mathbb{R}$ ponendo $f(\pm\pi/3 + k\pi) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$. La funzione non ha asintoti.
(c) La funzione $f(x)$ è derivabile per ogni $x \in [0, \pi/2] \setminus \{\pi/3\}$ e si ha

$$f'(x) = e^{-\frac{\log 2}{\left|\frac{1}{4} - \cos^2 x\right|}} \cdot \frac{2\log 2 \sin x \cos x}{\left(\frac{1}{4} - \cos^2 x\right)\left|\frac{1}{4} - \cos^2 x\right|}$$

e in particolare $f'(0) = f'(\pi/2) = 0$.
Equivalentemente, essendo $\left|\frac{1}{4} - \cos^2 x\right| = \pm\left(\frac{1}{4} - \cos^2 x\right)$ per $\frac{1}{4} - \cos^2 x \geq 0$ (risp., < 0),

$$f'(x) = \pm \log 2 \cdot 2^{-\frac{1}{\left|\frac{1}{4} - \cos^2 x\right|}} \cdot \frac{2\sin x \cos x}{\left(\frac{1}{4} - \cos^2 x\right)^2} \quad \text{per } \frac{1}{4} - \cos^2 x > 0 \text{ (risp., } < 0).$$

Quindi lo studio del segno della derivata prima $f'(x) > 0$, si riduce alla disequazione

$$\frac{1}{4} - \cos^2 x > 0$$

la cui soluzione è

$$f'(x) > 0 \qquad x \in (\pi/3, \pi/2) \qquad f'(x) < 0 \qquad x \in (0, \pi/3)$$

da cui possiamo concludere che $f(x)$ è monotona strettamente decrescente nell'intervallo $(0, \pi/3)$ e monotona strettamente crescente nell'intervallo $(\pi/3, \pi/2)$. Il punto $x = 0$ è punto di massimo relativo e assoluto, il punto $x = \pi/2$ è punto di massimo relativo in $[0, \pi/2]$. Il punto $x = \pi/3$ è di minimo assoluto per la funzione prolungata per continuità (0 è l'estremo inferiore della funzione data). Su tutto D, f ha massimo assoluto in $x = k\pi$ e massimo relativo in $x = \pm\pi/2 + k\pi$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Il suo prolungamento per continuit à ad $\mathbb{R}$ ha minimo assoluto in $x = \pm\pi/3 + k\pi$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Prima di abbozzare il grafico valutiamo i limiti significativi della derivata prima:

$$\lim_{x\to\pi/3^+} f'(x) = \lim_{x\to\pi/3^+} \left[\frac{2\sin x \cos x}{\log 2} \cdot \frac{\frac{\log^2 2}{\left(\frac{1}{4} - \cos^2 x\right)^2}}{e^{\frac{\log 2}{\left(\frac{1}{4} - \cos^2 x\right)}}} \right]$$

Osserviamo che

$$\lim_{x\to\pi/3^+} \frac{2\sin x\cos x}{\log 2} = \frac{\sqrt{3}}{2\log 2}$$

e posto

$$z = \log 2\left(\frac{1}{4} - \cos^2 x\right)^{-1}$$

$$\lim_{x\to\pi/3^+} \frac{\frac{\log^2 2}{\left(\frac{1}{4}-\cos^2 x\right)^2}}{e^{\frac{\log 2}{\left(\frac{1}{4}-\cos^2 x\right)}}} = \lim_{z\to+\infty} \frac{z^2}{e^z} = 0.$$

Analogamente si calcola che $\lim_{x\to\pi/3^-} f'(x) = 0$ da cui possiamo concludere che

$$\lim_{x\to\pi/3} f'(x) = 0.$$

Quindi la funzione prolungata per continuità ad $\mathbb{R}$ risulta derivabile anche in tutti i punti $x = \pm\pi/3 + k\pi$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

Figura 1: Grafico di $f(x)$

Esercizio 2

Calcolare al variare del parametro $a > 0$ il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{3a}\log x + \left(1 - e^{\arcsin^2(x)}\right)^2}{1 - \cos x - x - \log(1-\sinh x)}$$

Soluzione. Nel limite per $x \to 0^+$ si ha

$$\left(1 - e^{\arcsin^2(x)}\right) = \left(-x^2 + o(x^3)\right)^2 = x^4 + o(x^4)$$

da cui, per il numeratore, si ottiene

$$x^{3a}\log x + 1 - e^{\arcsin^2(x)} = x^{3a}\log x + x^4 + o(x^4).$$

Inoltre

$$\log(1-\sinh x) = -\sinh x - \frac{\sinh^2 x}{2} + o(\sinh^2 x)$$

da cui

$$\log(1-\sinh x) = -\left(x + o(x^2)\right) - \frac{1}{2}\left(x^2 + o(x^2)\right) + o(x^2)$$

e quindi

$$\log(1-\sinh x) = -x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2).$$

Inoltre
$$1-\cos x = \frac{x^2}{2} + o(x^3).$$
In conclusione per il deonominatore si ha
$$1-\cos x - x - \log(1-\sinh x) = x^2 + o(x^2).$$
Allora
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{3a}\log x + \left(1-e^{\arcsin^2(x)}\right)^2}{1-\cos x - x - \log(1-\sinh x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{3a}\log x + x^4 + o(x^4)}{x^2+o(x^2)}$$
e
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^{3a}\log x + x^4 + o(x^4)}{x^2+o(x^2)} = \lim_{x\to 0^+} x^{3a-2}\log x.$$
Si hanno i seguenti casi

i. $3a-2>0$ ossia $a>2/3$ il limite vale 0;

ii. $3a-2\le 0$ ossia $a\le 2/3$ il limite vale $-\infty$.

Esercizio 3

Si consideri il seguente integrale
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{5(a-1)}(1+x)^a\left[\log^2(1+x)+2\log(1+x)+2\right]}\,dx.$$

(a) Determinare i valori del parametro $a\in\mathbb{R}$ per cui l'integrale generalizzato converge.

(b) Calcolare l'integrale per $a=1$.

Soluzione. (a) Nel limite per $x\to+\infty$ si ha
$$\frac{1}{x^{5(a-1)}(1+x)^a\left[\log^2(1+x)+2\log(1+x)+2\right]} \sim \frac{1}{x^{6a-5}\log^2 x}$$
e quindi l'integrale è convergente se
$$6a-5\ge 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad a\ge 1.$$
(b) Per calcolare l'integrale il valore I dell'integrale nel caso $a=1$ calcoliamo prima di tutto
$$\int \frac{1}{(1+x)\left[\log^2(1+x)+2\log(1+x)+2\right]}\,dx.$$

Ricorrendo alla sostituzione

$$z = \log(1+x) \qquad dz = \frac{dx}{1+x}$$

si ha

$$\int \frac{1}{z^2+2z+2}\,dz = \int \frac{1}{(z+1)^2+1}\,dz = \arctan(z+1)$$

da cui

$$I = \lim_{k\to+\infty} \arctan(\log(k+1)+1) - \arctan(\log 2+1) = \frac{\pi}{2} - \arctan(\log 2+1).$$

Esercizio 4

Data la successione

$$a_n = \frac{2^n}{\sqrt{n}+2}\log\left(1+3e^{-n}\right)$$

(a) calcolarne il limite.

(b) Discutere la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Soluzione. (a) Nel limite per $n \to \infty$ si ha

$$\log\left(1+3e^{-n}\right) = 3e^{-n} + o(e^{-n}),$$

da cui

$$a_n = \frac{2^n}{\sqrt{n}+2}\log\left(1+3e^{-n}\right) = \frac{2^n}{\sqrt{n}+2}\cdot 3e^{-n} + o\left(\frac{2^n}{\sqrt{n}+2}\cdot e^{-n}\right) \sim 3\,\frac{2^n}{(\sqrt{n}+2)\,e^n}$$

da cui si vede che $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione infinitesima per il criterio del confronto asintotico, grazie alla scala degli infiniti $(2^n = o(e^n))$.

(b) La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

è a termini positivi e per quanto visto nel punto (a), nel limite per $n \to \infty$ si ha si ha

$$a_n \sim 3\,\frac{2^n}{(\sqrt{n}+2)\,e^n} = 3\,\frac{(2/e)^n}{\sqrt{n}+2}.$$

La serie geometrica di ragione $2/e < 1$ è convergente e, sempre per $n \to \infty$, si ha

$$a_n = o\left(\left(\frac{2}{e}\right)^n\right) \qquad \text{(cioè, } a_n \text{ è un infinitesimo di ordine superiore rispetto a } \left(\frac{2}{e}\right)^n\text{)}$$

da cui possiamo concludere subito che la serie è convergente, per il criterio del confronto asintotico.

Utilizzando invece il criterio del rapporto, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot 2^{n+1}}{(\sqrt{n+1}+2)e^{n+1}} \cdot \frac{(\sqrt{n}+2)e^n}{3\cdot 2^n} = \frac{2}{e} < 1$$

da cui concludiamo come prima che la serie converge.

ANALISI MATEMATICA 1

Commissione A.Centomo, M. Motta

Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 19 settembre 2011

TEMA 1

Esercizio 1

$$f(x) = 3x\, e^{-\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-9}}\right)}.$$

(a) Determinare il dominio di f, eventuali simmetrie e segno.

(b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare la funzione.

(c) Studiare la continuità e la derivabilità di f; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f. Calcolare i limiti di f', se significativi.

(d) Disegnare un grafico qualitativo di f in tutto il dominio.

Non è richiesto lo studio della convessità.

Esercizio 2 Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^3 \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) - n\sin(n) + (n+1)\arctan(n!)}{n! + 2e^{n^2+\log(n^2)}}\, e^{n^2}$$

Esercizio 3 Calcolare

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{|\sin x|}{\cos^2 x + 7\cos x + 12}\, dx$$

Esercizio 4 Data

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log(n+1) - \log n}{3+n}\, x^{2n+1},$$

(a) studiare la convergenza della serie $\forall x \geq 0$;

(b) (Facoltativo) studiare la convergenza della serie $\forall x < 0$.

Tempo: due ore e mezza.

ANALISI MATEMATICA 1 e MATEMATICA A

Commissione A. Centomo, P. Mannucci, C. Marchi

Ingegneria Gestionale, Meccanica Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 15 settembre 2010

TEMA 1

Esercizio 1 (7 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{8x} - \sqrt{|x-1|}.$$

(a) Determinare il dominio di f,

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti di f,

(c) studiare la derivabilità di f, calcolare f' e studiare la monotonia di f,

(d) calcolare gli attacchi di f,

(e) dalle informazioni precedenti disegnare un abbozzo del grafico.

Esercizio 2 (6 punti) Studiare i punti di flesso, la concavità e convessità della funzione

$$f(x) = |x|^3 e^{-(x+2)}.$$

Esercizio 3 (6 punti) Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x) - e^x + x^2 + 6x + 1}{\sqrt{\cosh(x) - 1}}.$$

Esercizio 4 (7 punti) Studiare la convergenza assoluta e la convergenza, al variare del parametro $\alpha > 0$, della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \arctan\left(\frac{2}{n^\alpha}\right).$$

Esercizio 5 (6 punti + 2 del facoltativo)

(a) Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{1}{e^x + 2e^{-x}}\, dx.$$

(b) Facoltativo: dalle informazioni ottenute in (a), calcolare

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x + 2e^{-x}}\, dx.$$

Tempo: **due ore e mezza**. Motivare tutte le risposte

N.B. Le parti facoltative vanno fatte dopo aver fatto le altri parti e non servono per ottenere l'ammissione all'orale.

N.B. Chi è sorpreso a parlare o copiare non solo verrà allontanato dall'aula ma non potrà sostenere gli altri due appelli successivi a questo.

Analisi 1

Traccia di soluzione del Tema 2

Commissione A. Centomo, P. Mannucci, C. Marchi

15 settembre 2010

Esercizio 1

(7 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{|3x-1|} - \sqrt{2x}.$$

(a) Determinare il dominio di f,

(b) determinare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti di f,

(c) calcolare f' e studiare la monotonia di f,

(d) calcolare i limiti di f' agli estremi del dominio,

(e) dalle informazioni precedenti disegnare un abbozzo del grafico.

Soluzione. La funzione è definita e continua in $D = [0, +\infty)$. Inoltre

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{3x-1} - \sqrt{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{\sqrt{3x-1}+\sqrt{2x}} = +\infty.$$

Prima di calcolare la derivata I conviene riscrivere la funzione come

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{3x-1} - \sqrt{2x}, & x \geq \frac{1}{3} \\ \sqrt{1-3x} - \sqrt{2x}, & 0 \leq x < \frac{1}{3} \end{cases}$$

da cui

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2\sqrt{3x-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{2x}}, & x > \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{-3}{2\sqrt{1-3x}} - \dfrac{1}{\sqrt{2x}}, & 0 < x < \dfrac{1}{3} \end{cases}.$$

Osserviamo che $f'(x)$ ristretta all'intervallo $(0, 1/3)$ è sempre strettamente negativa. Quindi, per $x \in (1/3, +\infty)$, studiamo il segno della derivata I

$$\frac{3}{2\sqrt{3x-1}} - \frac{1}{\sqrt{2x}} > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{3}{2\sqrt{3x-1}} > \frac{1}{\sqrt{2x}}$$

da cui

$$\frac{3}{2\sqrt{3x-1}} > \frac{1}{\sqrt{2x}} \qquad \Leftrightarrow \qquad 3\sqrt{2x} > 2\sqrt{3x-1} \qquad \Leftrightarrow \qquad 18x > 12x - 4 \qquad \Leftrightarrow \qquad x > -\frac{2}{3}$$

e, essendo $-2/3 < 1/3$, $f'(x) < 0$ in $(1/3, +\infty)$. Possiamo concludere che:

a) $f(x)$ ristretta all'intervallo $(0, 1/3)$ è monotona strettamente decrescente;

b) $f(x)$ ristretta all'intervallo $(1/3, +\infty)$ è monotona strettamente crescente.

Calcoliamo quindi i seguenti limiti:

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to \frac{1}{3}^-} f'(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to \frac{1}{3}^+} f'(x) = +\infty$$

da cui possiamo concludere in particolare che il punto $(1/3, -\sqrt{2/3})$ è una cuspide.

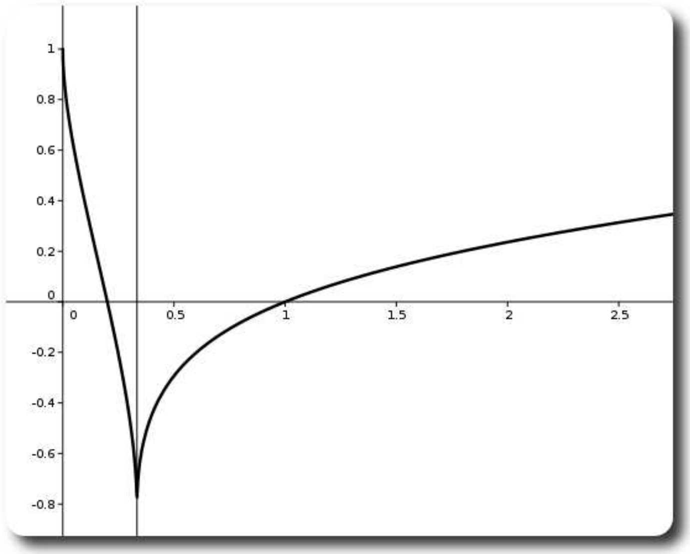


Figura 1. Grafico di f

Esercizio 2

(6 punti) Studiare i punti di flesso, la concavità e convessità della funzione

$$f(x)=|x|^3e^{-(x+1)}.$$

Soluzione. La funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$ e si può riscrivere nella forma

$$f(x)=\begin{cases} x^3\,e^{-(x+1)}, & x\geq 0\\ -x^3\,e^{-(x+1)}, & x<0.\end{cases}$$

La derivata prima è

$$f'(x)=\begin{cases} x^2\,(3-x)e^{-(x+1)}, & x>0\\ -x^2\,(3-x)e^{-(x+1)}, & x<0.\end{cases}$$

la derivata seconda è

$$f''(x)=\begin{cases} x(x^2-6x+6)\,e^{-(x+1)}, & x>0\\ -x(x^2-6x+6)e^{-(x+1)}, & x<0.\end{cases}$$

Prima di procedere allo studio del segno della derivata II osserviamo che

$$x^2-6x-6\geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x\leq 3-\sqrt{3} \quad \vee \quad x\geq 3+\sqrt{3}.$$

Suddividiamo lo studio della derivata II in due parti.

A) Per valori di x che cadono nell'intervallo $(-\infty,0)$ si ha sempre $f''(x)>0$. Quindi $f(x)$ è strettamente convessa in $(-\infty,0)$;

B) Per valori di x che cadono nell'intervallo $(0,+\infty)$ si ha:

   i. $f''(x)>0$ se $x\in(0,3-\sqrt{3})\cup(3+\sqrt{3},+\infty)$. Quindi $f(x)$ è convessa in ciascuno dei due intervalli dell'unione;

   ii. $f''(x)<0$ nell'intervallo $(3-\sqrt{3},3+\sqrt{3})$. Quindi $f(x)$ è concava in tale intervallo.

I punti di flesso di f sono $x_1=3-\sqrt{3}$ e $x_2=3+\sqrt{3}$. Per concludere l'esercizio vediamo cosa si può dire del punto $x=0$. Osserviamo che

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^-} f'(x)=0 \qquad \lim_{x\to 0^+} f''(x)=\lim_{x\to 0^-} f''(x)=0.$$

Per quanto visto in precedenza, in opportuni intorni destri e sinistri di $x=0$, la funzione è sempre convessa e quindi $x=0$ non è un punto di flesso. Non sarebbe difficile vedere che $x=0$ è un punto di minimo relativo.

Esercizio 3

(6 punti) Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(\cosh(x)-1)^{1/2}}{e^x-\log(1+x)+x^2+5x-1}.$$

Soluzione. Nel limite $x\to 0^+$ si ha

$$\cosh(x)-1=\frac{x^2}{2}+o(x^3) \qquad \log(1+x)=x+o(x) \qquad e^x-1=x+o(x).$$

Per quanto riguarda il numeratore osserviamo che

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\cosh(x)-1}{x^2}\right)^{1/2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{(\cosh(x)-1)^{1/2}}{x}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

da cui possiamo concludere che, nel limite di $x\to 0^+$, si ha

$$(\cosh(x)-1)^{1/2}=\frac{\sqrt{2}}{2}x+o(x).$$

Sostituendo gli sviluppi per il denominatore si ha direttamente

$$e^x-\log(1+x)+x^2+5x-1=5x+o(x).$$

Il limite di partenza diviene

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}x+o(x)}{5x+o(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+o(1)}{5+o(1)}=\frac{\sqrt{2}}{10}.$$

Esercizio 4

(7 punti) Studiare la convergenza assoluta e la convergenza, al variare del parametro $\alpha>0$, della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\log\left(1+\frac{3}{n^\alpha}\right).$$

Soluzione. La serie si presenta nella forma

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n \tag{1}$$

con

$$a_n=\log\left(1+\frac{3}{n^\alpha}\right).$$

Osserviamo subito che $a_n>0$ per ogni $n\geq 1$ e per ogni $\alpha>0$. Quindi la serie è a termini di segno alterno. Iniziamo studiando la convergenza assoluta ossia la convergenza della serie a termini positivi

$$\sum_{n=1}^{+\infty}a_n.$$

Nel limite per $n\to+\infty$ e per $\alpha>0$ si ha

$$a_n=\log\left(1+\frac{3}{n^\alpha}\right)=\frac{3}{n^\alpha}+o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\sim\frac{3}{n^\alpha}.$$

Ricordato che la serie armonica generalizzata

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

converge per $\alpha > 1$, per il Criterio del confronto asintotico, possiamo concludere che la serie (1) converge assolutamente, e quindi anche semplicemente, per $\alpha > 1$.

Resta da discutere la convergenza semplice nel caso $0 < \alpha \leq 1$.

Per quanto osservato all'inizio possiamo ricorrere al Criterio di Leibniz:

1. la successione $\{a_n\}$ è a termini positivi;
2. la successione $\{a_n\}$ è infinitesima. Infatti si ha
$$\lim_{n \to +\infty} \log\left(1 + \frac{3}{n^\alpha}\right) = 0$$
per ogni $\alpha > 0$;
3. la successione $\{a_n\}$ è monotona strettamente decrescente in quanto
$$\log\left(1 + \frac{3}{(n+1)^\alpha}\right) < \log\left(1 + \frac{3}{n^\alpha}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{(n+1)^\alpha} < \frac{1}{n^\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^\alpha > 1$$
per ogni $n \geq 1$ e se $\alpha > 0$.

Quindi per il Criterio di Leibniz la serie converge semplicemente se $\alpha \in (0, 1]$.

Esercizio 5

(6 punti) Calcolare il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{1}{e^{-x} + 3e^x} d\,x.$$

(2 punti) Facoltativo: dalle informazioni ottenute al punto precedente, calcolare

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{-x} + 3e^x} d\,x.$$

Soluzione. Osserviamo che

$$\int \frac{1}{e^{-x} + 3e^x} d\,x = \int \frac{e^x}{1 + 3e^{2x}} d\,x$$

e quindi utilizziamo il Teorema di integrazione per sostituzione con

$$y = \sqrt{3}\, e^x \quad d y = \sqrt{3}\, e^x\, d x$$

ottenendo

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \int \frac{1}{1 + y^2} d y = \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan y$$

da cui

$$\int \frac{1}{e^{-x} + 3e^x} d\,x = \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \sqrt{3}\, e^x.$$

A questo punto possiamo concludere l'esercizio in quanto

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{-x} + 3e^x} d\,x = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \sqrt{3}\, e^x\right) - \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan \sqrt{3}\, e^0 = \frac{\pi\sqrt{3}}{6} - \frac{\pi\sqrt{3}}{9} = \frac{\pi\,\sqrt{3}}{18}.$$

Analisi 1

Traccia di soluzione del Tema 1

Commissione A. Centomo, P. Mannucci, C. Marchi

26 gennaio 2010

Esercizio 1 (7 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\big(\sqrt{x}\big) - \log(1+x)$$

(a) Determinare il dominio di f e i limiti agli estremi del dominio.

(b) Determinare gli intervalli di monotonia, gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f, i limiti di f' se significativi.

(c) Disegnare un grafico qualitativo di f in tutto il dominio.

Non è richiesto lo studio della convessità.

(**Facoltativo**) Tenuto conto anche delle informazioni ricavate dai punti precedenti, dire se esistono e quanti sono gli zeri della funzione $g(x) = f(x) - 27x$.

Soluzione. Il dominio di f è $D = [0, +\infty)$, $f(0) = 0$, e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$

La derivata prima di f è

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+x} = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1\right) \cdot \frac{1}{1+x} = \frac{1-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\,(1+x)}$$

ed è definita in $(0, +\infty)$. Lo studio del segno della derivata prima si riduce allo studio della disequazione

$$1 - 2\sqrt{x} \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 \leq x \leq \frac{1}{4}$$

da cui concludiamo che la funzione è monotona strettamente crescente in $(0,\ 1/4)$ e monotona strettamente decrescente in $(1/4,\ +\infty)$. Il punto $x = 1/4$ è di massimo relativo e assoluto

$$f(1/4) = \arctan(1/2) - \log 5 + \log 4$$

L'unico limite significativo della derivata prima è

$$\lim_{x\to0^+} f'(x) = +\infty.$$

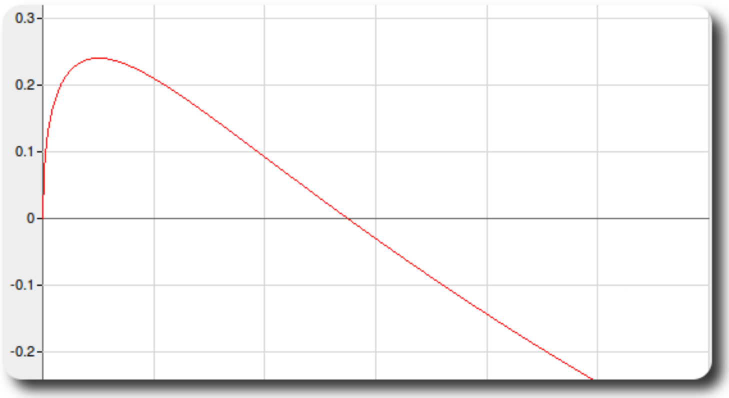


Figura 1. Grafico di f

(**Facoltativo**) La funzione $g(x)$ è definita continua in D e ha uno zero in $x=0$. Per vedere se ci sono altri zeri in D osserviamo che

$$g(x)=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x)=r(x) \tag{1}$$

dove $r(x)=27x$. Per quanto visto sopra la funzione $f(x)$ è limitata superiormente e

$$\max_{(0,+\infty)} f = f(1/4) < \frac{\pi}{4} + 2 < r(1/4) = \frac{27}{4}. \tag{2}$$

Da (2) e dal fatto che $r(x)$ è monotona strettamente crescente possiamo concludere che

$$g(x) < 0$$

per ogni $x \in [1/4, +\infty)$ e quindi che, se esistono altri zeri di g oltre $x=0$, questi devono cadere nell'intervallo $(0,1/4)$. Per $x \to 0^+$

$$g(x) \sim \sqrt{x} - 28x > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 0 < x < \frac{1}{28^2}$$

e quindi $g(x)$ è definitivamente positiva per $x \to 0^+$. Per il Teorema degli zeri esiste allora almeno un valore di $\alpha \in (0,1/4)$ tale che $g(\alpha)=0$ e quindi g ammette almeno due zeri. Si può dimostrare che α è unico osservando che la derivata prima

$$g'(x) = f'(x) - 27 = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1\right) \cdot \frac{1}{1+x} - 27$$

è continua e monotona strettamente decrescente in $(0,1/4]$ con

$$\lim_{x \to 0^+} g'(x) = +\infty \qquad g'(1/4) = -27.$$

Dal Teorema degli zeri, tenuto conto anche della monotonia di g', possiamo concludere che esiste unico $\beta \in (0,\, 1/4)$ tale che $g'(\beta)=0$. Quindi $g(x)$ è monotona strettamente crescente in $[0,\, \beta)$ e strettamente decrescente in $(\beta,\, 1/4]$. Il punto $x=\beta$ è di massimo assoluto e $g(\beta) > 0$. Quindi $\alpha \in (\beta, 1/4)$ è l'unico zero di g oltre a $x=0$.

Esercizio 2 (7 punti) Calcolare il seguente limite al variare del parametro reale $\alpha > 0$:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{(x - \arcsin x)^2 - \log(1+\sin^2 x)}{x^\alpha + x\log(1+x)}.$$

Soluzione. Il limite si presenta come forma indeterminata del tipo [0/0]. Per $x \to 0^+$ si ha

$$\arcsin x = x + o(x^2) \qquad \log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad \sin(x) = x + o(x^2)$$

da cui

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(x-\arcsin x)^2 - \log(1+\sin^2 x)}{x^\alpha + x\log(1+x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2 + o(x^2)}{x^\alpha + x^2 + o(x^2)}.$$

Distinguiamo i seguenti casi:

1. $0 < \alpha < 2$ allora
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2 + o(x^2)}{x^\alpha + x^2 + o(x^2)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2 + o(x^2)}{x^\alpha + o(x^\alpha)} = 0$$
2. $\alpha = 2$ allora
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2 + o(x^2)}{x^\alpha + x^2 + o(x^2)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2 + o(x^2)}{2x^2 + o(x^2)} = -\frac{1}{2}$$
3. $\alpha > 2$ allora
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2 + o(x^2)}{x^\alpha + x^2 + o(x^2)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = -1.$$

Esercizio 3 (6 punti) Calcolare il seguente integrale definito

$$\int_0^{\pi/6} \frac{1}{\cos^2 x\sqrt{1-\tan x}}\, dx.$$

(**Facoltativo**) Discutere la convergenza di $\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x\sqrt{1-\tan x}}\, dx$.

Soluzione. Si ha direttamente

$$\int_0^{\pi/6} \frac{1}{\cos^2 x\sqrt{1-\tan x}}\, dx = \left[-2\sqrt{1-\tan x}\,\right]_0^{\pi/6} = 2 - 2\sqrt{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}.$$

(**Facoltativo**) Il modo più semplice di studiare la convergenza è

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^2 x\sqrt{1-\tan x}}\, dx = \lim_{y\to\frac{\pi}{4}^-} \int_0^{y} \frac{1}{\cos^2 x\sqrt{1-\tan x}}\, dx = 2 + \lim_{y\to\frac{\pi}{4}^-} -2\sqrt{1-\tan y} = 2$$

da cui si vede che l'integrale converge.

Nota 1. L'integrale di partenza di può risolvere con la sostituzione $y = 1 - \tan x$.

Esercizio 4 (7 punti) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{\log n + 2n^{\log n} + \sin n}{3^n}\right)^n$$

Soluzione. La serie è a termini positivi. Per discutere la convergenza ricorriamo al Criterio della radice e calcoliamo il limite:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n + 2n^{\log n} + \sin n}{3^n} = 2\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\log^2 n}}{e^{n\log 3}} \cdot \left(1 + \frac{\log n}{2n^{\log n}} + \frac{\sin n}{2n^{\log n}}\right) \tag{3}$$

ora

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{\log^2 n}}{e^{n\log 3}}=\lim_{n\to+\infty}e^{\log^2 n-n\log 3}=\lim_{n\to+\infty}e^{n\left(\frac{\log^2 n}{n}-\log 3\right)}=0$$

dove si è utilizzato

$$\lim_{n\to+\infty}n\left(\frac{\log^2 n}{n}-\log 3\right)=-\infty.$$

Allora il limite (3) vale $0<1$ e quindi per il Criterio della radice la serie converge.

Esercizio 5 (5 punti) Determinare per quali valori del parametro reale $\alpha\in\mathbb{R}$, la funzione

$$f(x)=(3x^2-1)e^{\alpha x+2}$$

ha derivata seconda nulla in $x=0$. Determinare inoltre l'equazione della retta tangente in tale punto.

(**Facoltativo**) Per tali valori del parametro α, determinare gli intervalli di convessità di f.

Soluzione. La funzione è derivabile e

$$f'(x)=(3\alpha x^2+6x-\alpha)\,e^{\alpha x+2}$$

inoltre

$$f''(0)=e^2(6-\alpha^2).$$

I valori di α che annullano la derivata seconda sono $\alpha=\pm\sqrt{6}$. L'equazione delle tangenti corrispondenti a tali valori sono

$$y=-\sqrt{6}\,e^2x-e^2\qquad y=\sqrt{6}\,e^2x-e^2.$$

(**Facoltativo**) Nel caso $\alpha=\sqrt{6}$ si ha

$$f(x)=(3x^2-1)e^{\sqrt{6}x+2}$$

che è definita su tutto $\mathbb{R}$. La derivata prima di f è

$$f'(x)=(6x+(3x^2-1)\sqrt{6})\,e^{\sqrt{6}x+2}$$

e la derivata seconda di f è

$$f''(x)=6x\,(3x+2\sqrt{6})\,e^{\sqrt{6}x+2}.$$

Lo studio del segno della derivata seconda si riduce alla disequazione

$$x\,(3x+2\sqrt{6})>0\quad\Leftrightarrow\quad x<-\frac{2}{3}\sqrt{6}\quad\vee\quad x>0$$

da cui

$$\begin{array}{lll} f''(x)>0 & x\in\left(-\infty,-\frac{2}{3}\sqrt{6}\right) & f\text{ strettamente convessa}\\ f''(x)<0 & x\in\left(-\frac{2}{3}\sqrt{6},0\right) & f\text{ strettamente concava}\\ f''(x)>0 & x\in(0,+\infty) & f\text{ strettamente convessa}\end{array}$$

e i punti $x=0$ e $x=-2\sqrt{6}/3$ sono punti di flesso. Il caso $\alpha=-\sqrt{6}$ è del tutto analogo.

Analisi 1

Traccia di soluzione del Tema 1

Commissione A. Centomo, P. Mannucci, C. Marchi

8 febbraio 2010

Esercizio 1

(7 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(e^{\left(2x+\frac{1}{x}\right)}\right)$$

(a) Determinare il dominio di f, il segno, i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti di f.

(b) Determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f. I limiti di f', se significativi.

(e) Disegnare un grafico qualitativo di f in tutto il dominio.

Non è richiesto lo studio della convessità.

Soluzione. La funzione è definita positiva in $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

Inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{\pi}{2} \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0.$$

Possiamo concludere che la funzione presenta un asintoto orizzontale destro e un asintoto orizzontale sinistro rispettivamente di equazione $y = \pi/2$ e $y = 0$.

La funzione è limitata in D e quindi non ammette altri asintoti.

La funzione è derivabile in D e

$$f'(x) = \frac{e^{2x+\frac{1}{x}}}{1+\left(e^{2x+\frac{1}{x}}\right)^2} \cdot \left(2 - \frac{1}{x^2}\right)$$

Lo studio del segno della derivata prima si riduce a

$$f'(x) \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2x^2 - 1 \geq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \vee \quad x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Possiamo concludere che

- f è monotona strettamente crescente se ristretta agli intervalli $(-\infty, -\sqrt{2}/2)$ e $(\sqrt{2}/2, +\infty)$;
- f è monotona strettamente decrescente se ristretta agli intervalli $(-\sqrt{2}/2, 0)$ e $(0, \sqrt{2}/2)$;

- il punto $x_M = -\sqrt{2}/2$ è punto di massimo relativo (non assoluto);
- il punto $x_m = \sqrt{2}/2$ è punto di minimo relativo (non assoluto).

I valori massimo e minimo assunti dalla funzione sono rispettivamente:

$$f(x_M) = \arctan\left(e^{-2\sqrt{2}}\right) \qquad f(x_m) = \arctan\left(e^{2\sqrt{2}}\right).$$

Calcoliamo i limiti significativi della derivata prima.

Nel limite $x \to 0^+$, si ha

$$\lim_{x \to 0^+} e^{2x + \frac{1}{x}} = +\infty$$

e si vede che

$$\frac{\left(e^{2x+\frac{1}{x}}\right)}{1 + \left(e^{2x+\frac{1}{x}}\right)^2} \sim \frac{1}{e^{2x+\frac{1}{x}}} \sim \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}$$

allora

$$f'(x) = \frac{\left(e^{2x+\frac{1}{x}}\right)}{1 + \left(e^{2x+\frac{1}{x}}\right)^2} \cdot \frac{2x^2 - 1}{x^2} \sim -\frac{1}{x^2 e^{\frac{1}{x}}}$$

da cui si conclude che

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 0.$$

Analogamente si vede che

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = 0$$

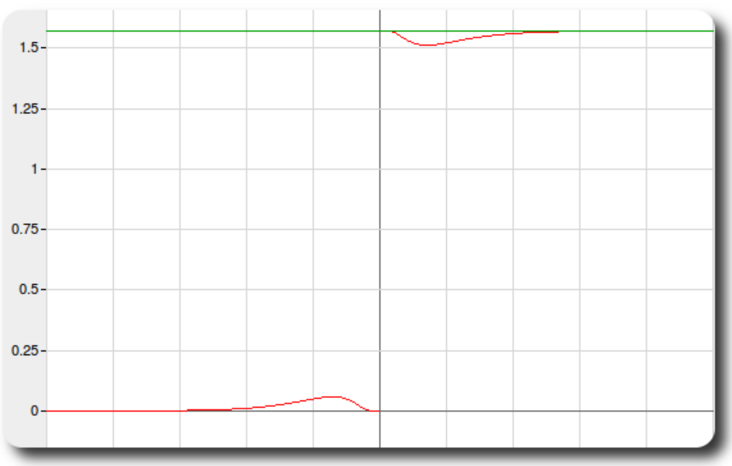


Figura 1. Grafico di f

Esercizio 2

(6 punti) Calcolare il seguente integrale definito

$$\int_0^{\pi} x^3 \sin(2x^2)\, dx.$$

Soluzione. Iniziamo calcolando una primitiva della funzione integranda. Con la sostituzione

$$y = x^2 \quad dy = 2x\,dx$$

si ha

$$\int x^3 \sin(2x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int y\sin(2y)dy$$

Integrando per parti si ha

$$\frac{1}{2}\int y\sin(2y)\,dy = -\frac{y}{4}\cos(2y) + \frac{1}{4}\int \cos(2y)\,dy = -\frac{y}{4}\cos(2y) + \frac{1}{8}\sin(2y)$$

da cui

$$\int_0^{\pi} x^3\sin(2x^2)\,dx = \left[-\frac{x^2}{4}\cos(2x^2) + \frac{1}{8}\sin(2x^2)\right]_0^{\pi} = -\frac{\pi^2}{4}\cos(2\pi^2) + \frac{1}{8}\sin(2\pi^2).$$

Esercizio 3

(7 punti)

(a) Trovare l'ordine di infinitesimo di $a_n = \arcsin\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) - e^{\frac{1}{n}} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n^\alpha}$ al variare del parametro reale $\alpha > 0$.

(b) Determinare per quali $\alpha > 0$ la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge.

Soluzione. Nel limite per $n \to +\infty$ si ha

$$\arcsin\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^3 + o\left(\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^4\right)$$

da cui, sviluppando i calcoli, anche

$$\arcsin\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Inoltre

$$e^{1/n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)$$

da cui, sviluppando i calcoli, anche

$$e^{1/n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

In conclusione allora

$$\arcsin\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right) - e^{1/n} \cdot \sin\left(\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

e quindi

$$a_n = \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Possiamo distinguere i seguenti casi

1. per $\alpha \geq 3$ si ha che a_n è infinitesimo di ordine 3 rispetto a $1/n$;

2. $0 < \alpha < 3$: a_n è infinitesimo di ordine α rispetto a $1/n$.

Per il Criterio del confronto asintotico e tenuto conto di quanto noto sulla convergenza della serie armonica generalizzata, possiamo concludere che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

risulta convergente per $\alpha > 1$ e divergente per $0 < \alpha \leq 1$.

Esercizio 4

(6 punti) Trovare, se esistono, gli asintoti obliqui, per $x \to \pm\infty$, della funzione

$$f(x) = x^3 \log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + \arctan 3x.$$

Soluzione. Per $x \to \pm\infty$, si ha

$$\log\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

da cui osserviamo che

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} x \cdot \left(1 + o(1) + \frac{\arctan(3x)}{x}\right) = \pm\infty.$$

Ora

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + o(1) + \frac{\arctan(3x)}{x}\right) = 1.$$

Inoltre

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim_{x \to +\infty} o(x) + \arctan(3x) = \frac{\pi}{2}.$$

La funzione ha come asintoto obliquo destro la retta di equazione $y = x + \pi/2$. La funzione è dispari, in quanto $f(-x) = -f(x)$, quindi

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(-x)}{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

Inoltre

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - x = \lim_{x \to -\infty} o(x) + \arctan(3x) = -\frac{\pi}{2}.$$

In conclusione l'asintoto obliquo sinistro è la retta di equazione $y = x - \pi/2$.

Esercizio 5

(6 punti) Si consideri la funzione di due variabili

$$f(x, y) = e^{xy + 2x}.$$

(a) Calcolare le derivate parziali $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$.

(b) Trovare gli eventuali punti critici di f, calcolare la matrice Hessiana nei punti critici e determinarne la natura.

Soluzione. Le derivate parziali sono

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (y+2)\, e^{xy+2x} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x\, e^{xy+2x}.$$

L'unico punto critico di f è $P = (0, -2)$. La matrice Hessiana in tale punto risulta

$$D^2 f(P) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e, osservato che $\det D^2 f(P) = -1 < 0$, possiamo concludere che P è un punto di sella.

Analisi 1

Traccia di soluzione del Tema 1

Commissione A. Centomo, P. Mannucci, C. Marchi

20 luglio 2010

Esercizio 1

(7 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = x^{\sin 3x}$$

(a) Determinare il dominio di f e il segno.

(b) Determinare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti di f.

(c) Studiare la continuità ed eventuali estendibilità per continuità.

(d) Studiare la derivabilità di f; calcolare f'.

(e) Calcolare il limite di $f'(x)$ agli estremi del dominio.

Soluzione. Per risolvere l'esercizio conviene riscrivere la funzione nella forma

$$f(x) = e^{\sin 3x \log x}$$

da cui si vede subito che il dominio è $D = (0, +\infty)$ e che la funzione è definita strettamente positiva in D. Osserviamo che la funzione non ammette limite per $x \to +\infty$. Inoltre

$$\lim_{x\to 0^+} \sin 3x \log x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin 3x}{3x} 3x \log x = 0$$

in quanto

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin 3x}{3x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0^+} 3x \log x = 0.$$

Possiamo allora concludere che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = e^0 = 1.$$

La funzione non ammette asintoti verticali, orizzontali e obliqui. La funzione è continua nel suo dominio e può essere estesa per continuità su $[0, +\infty)$ ponendo $f(0) = 1$.

La derivata I di $f(x)$ è

$$f'(x) = e^{\sin 3x \log x}\left(3\cos 3x \log x + \frac{\sin 3x}{x}\right)$$

da cui concludiamo che la funzione è derivabile in D. Per concludere l'esercizio osserviamo che

$$\lim_{x\to 0^+}\left(3\cos 3x \log x + \frac{\sin 3x}{x}\right) = 3\lim_{x\to 0^+} \cos 3x \log x + 3 = -\infty$$

e, ricordato che

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$$

si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)\left(3\cos 3x \log x + \frac{\sin 3x}{x}\right) = -\infty.$$

Esercizio 2

(6 punti) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x-1}{\alpha x}\right)$$

e si determinino i valori di $\alpha > 0$ in modo che essa abbia un punto di flesso in $x = 1/2$. Scrivere l'equazione della retta tangente nel punto di flesso.

Soluzione. La derivata I di $f(x)$ è

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{\alpha x}\right)^2} \cdot \frac{\alpha x - \alpha(x-1)}{\alpha^2 x^2} = \frac{\alpha}{\alpha^2 x^2 + (x-1)^2} = \frac{\alpha}{\alpha^2 x^2 + x^2 - 2x + 1}$$

ed è definita per ogni $x \in \mathbb{R}^+$. La derivata II di $f(x)$ è

$$f''(x) = -\frac{2\alpha(\alpha^2 x + x - 1)}{(\alpha^2 x^2 + x^2 - 2x + 1)^2}$$

e si annulla in $x = 1/2$ quando

$$\alpha^2 - 1 = 0.$$

ossia, ricordato che $\alpha > 0$, solo per $\alpha = 1$. In corrispondenza di tale valore si ha

$$f''(x) = -\frac{4x-2}{(2x^2 - 2x + 1)^2}$$

e

$$-\frac{4x-2}{(2x^2-2x+1)^2} > 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x < \frac{1}{2}.$$

Possiamo allora concludere che esiste un intorno sinistro di $x = 1/2$ in cui si ha $f''(x) > 0$ e un intorno destro di $x = 1/2$ in cui $f''(x) < 0$ e ciò conferma che $x = 1/2$ è un punto di flesso.

Esercizio 3

(7 punti) Studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{1/n} - 1 - \log(1 + \sin(1/n))}{\arctan n}$$

Soluzione. Nel limite di $n \to +\infty$ si ha

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad e^{1/n} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

da cui, sostituendo, possiamo concludere che

$$e^{1/n} - 1 - \log\left(1 + \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Il numeratore è asintotico a $1/n^2$ e quindi è definitivamente positivo per $n \to +\infty$. In altri termini, per n "grande", la serie è a termini positivi. Posto

$$a_n = \frac{e^{1/n} - 1 - \log(1 + \sin(1/n))}{\arctan n}$$

e ricordato che

$$\lim_{n \to +\infty} \arctan n = \frac{\pi}{2}$$

si ha

$$a_n \sim \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2}$$

da cui, sapendo che la serie armonica generalizzata di termine generico $1/n^2$ converge, per il Criterio del confronto asintotico si ha che la serie di partenza converge.

Esercizio 4

(7 punti) Calcolare il seguente integrale definito

$$\int_1^2 \sin(\log x)\,d\,x.$$

Soluzione. Utilizziamo la sostituzione

$$y = \log x \qquad d y = \frac{1}{x}\,d x \qquad y_1 = 0 \qquad y_2 = \log 2$$

da cui

$$\int_1^2 \sin(\log x)\,d\,x = \int_0^{\log 2} e^y \sin y\,d y.$$

Integrando per parti

$$\int_0^{\log 2} e^y \sin y d y = [e^y \sin y]_0^{\log 2} - \int_0^{\log 2} e^y \cos y d y = 2\sin(\log 2) - \int_0^{\log 2} e^y \cos y d y$$

e quindi

$$\int_0^{\log 2} e^y \sin y d y = 2\sin(\log 2) - [e^y \cos y]_0^{\log 2} - \int_0^{\log 2} e^y \sin y d y$$

da cui

$$\int_0^{\log 2} e^y \sin y d y = \sin(\log 2) - \frac{1}{2}\,(2\cos(\log 2) - 1) = \sin(\log 2) - \cos(\log 2) + \frac{1}{2}.$$

Esercizio 5

(5 punti) Si consideri la funzione in due variabili

$$f(x, y) = y^2 + 2y + x^2 + 7 - 2\log x.$$

Determinare i punti critici di f e specificarne il tipo.

Soluzione. La funzione è definita in

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}.$$

Per determinare i punti critici calcoliamo innanzitutto il gradiente della funzione

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(2x - \frac{2}{x}, 2y + 2\right)$$

quindi risolviamo il sistema

$$\begin{cases} 2x - \dfrac{2}{x} = 0 \\ 2y + 2 = 0 \end{cases}$$

le cui soluzioni sono

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = -1 \end{cases}.$$

L'unico punto critico in D è $P = (1, -1)$. La matrice hessiana risulta

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 2 + \frac{2}{x^2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e

$$H(1, -1) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

il determinante della matrice hessiana è $8 > 0$ e osservato che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, -1) = 4 > 0$$

possiamo concludere che il punto critico è un minimo locale.

ANALISI MATEMATICA 1

Commissione F. Albertini, P. Mannucci, C. Marchi, M. Motta

Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 11-02-2009

(Viene dato un cenno di soluzione del Tema 1. I Temi 2, 3 e 4 possono essere svolti in modo del tutto simile)

TEMA 1

Esercizio 1

Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{\cos(3x) - 1}{\cos(3x) + 1}\right) + \frac{\pi}{3}.$$

(a) Determinare il dominio di f, eventuali simmetrie, periodicità e segno.

(b) Determinare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti di f.

(c) Studiare la continuità e la derivabilità di f; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f. Calcolare i limiti di f', se significativi.

(d) Studiare la convessità e determinare gli eventuali flessi.

(e) Disegnare un grafico qualitativo di f in tutto il dominio.

Cenno della risoluzione

La funzione è definita in $D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\}$.
È pari quindi si studia per gli $x > 0$ e poi si considera la simmetrica rispetto all'asse delle y.
È anche periodica di periodo $\frac{2}{3}\pi$, quindi basta studiarla in $[0, \frac{\pi}{3}[$.
$f(x) \geq 0$ se e solo se $\arctan\left(\frac{\cos(3x)-1}{\cos(3x)+1}\right) \geq -\frac{\pi}{3}$, che, essendo $\arctan(\cdot)$ crescente, equivale a $\frac{\cos(3x)-1}{\cos(3x)+1} \geq \tan(-\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$. Risolvendo, si ottiene che $f(x) \geq 0$ se e solo se $x \leq x^* = \frac{1}{3}\arccos\left(\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)$ che è un numero appartenente a $]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}[$.
$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = \frac{\pi}{3}$.
$\lim_{x\to(\frac{\pi}{3}^-)} f(x) = -\frac{\pi}{6}$ (si noti che in questo caso $\cos(3x) \to -1^+$).
Non ci sono asintoti. Si può estendere la funzione ad una funzione continua in tutto $\mathbb{R}$.
L'espressione della derivata prima è:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\cos(3x)-1}{\cos(3x)+1}\right)^2}\left(\frac{\cos(3x) - 1}{\cos(3x) + 1}\right)' = ... = \frac{-3\sin(3x)}{\cos^2(3x) + 1}.$$

Quindi $f(x)$ è strettamente decrescente in $[0, \frac{\pi}{3}[$. Il punto $x = 0$ (e tutti i punti $x_k = \frac{2}{3}k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$) è un punto di massimo relativo ed assoluto, mentre $x = \frac{\pi}{3}$ (e tutti i punti $\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$) è un punto di minimo relativo ed assoluto.
L' attacco di f' in $\frac{\pi}{3}$ è $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}^-} f'(x) = 0$.

ANALISI MATEMATICA 1

Commissione F. Albertini, P. Mannucci, C. Marchi, M. Motta

Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 28-01-2009

(Viene dato un cenno di soluzione del Tema 1 e del solo Es. 1 del Tema 2. Gli esercizi rimanenti del Tema 2 e i Temi 3 e 4 possono essere svolti in modo del tutto simile a questi.)

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{\frac{2}{\log(9-x^2)}}$$

(a) Determinare il dominio di f, eventuali simmetrie e segno.

(b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare la funzione.

(c) Studiare la continuità e la derivabilità di f; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f. Calcolare i limiti di f', se significativi.

(d) Disegnare un grafico qualitativo di f in tutto il dominio.

Non è richiesto lo studio della convessità.

Cenno della risoluzione

La funzione è definita in $D = \{|x| < 3, x \neq \pm 2\sqrt{2}\}$. È sempre positiva e pari quindi si studia per gli $x > 0$ e poi si considera la simmetrica rispetto all'asse delle y.
$\lim_{x\to 3} f(x) = 1$.
$\lim_{x\to(2\sqrt{2})^+} f(x) = 0$ (si noti che in questo caso $\log(9-x^2) \to 0^-$).
$\lim_{x\to(2\sqrt{2})^-} f(x) = +\infty$ (si noti che in questo caso $\log(9-x^2) \to 0^+$).
Si può estendere la funzione in $[2\sqrt{2}, 3]$ ad una funzione continua.
L'espressione della derivata prima è:

$$f'(x) = e^{\frac{2}{\log(9-x^2)}} \frac{-2}{\log^2(9-x^2)} \frac{1}{9-x^2}(-2x).$$

Quindi $f(x)$ è strettamente crescente nei due intervalli $[0, 2\sqrt{2})$, $(2\sqrt{2}, 3)$. Il punto $x = 0$ è un punto di minimo relativo. Studiamo ora gli attacchi agli estremi del dominio dove il limite della funzione è finito.
$\lim_{x\to 3} f'(x) = +\infty$.
$\lim_{x\to(2\sqrt{2})^+} f'(x) = 0$.
Per calcolare quest'ultimo limite si può usare il fatto che il fattore $\frac{4x}{9-x^2}$ è limitato in un intorno di $2\sqrt{2}$ e per l'altra parte si può usare la sostituzione $y = \frac{1}{\log(9-x^2)}$, se $x \to (2\sqrt{2})^+$, si ha $y \to -\infty$, quindi il limite si riconduce allo studio del limite $\lim_{y\to-\infty} e^{2y}y^2$ che si riconduce alla scala degli infiniti con l'ulteriore sostituzione $z = -y$.

Esercizio 2 Calcolare il seguente limite al variare del parametro $a > 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^a - 2\sin^2 x + 1 - e^{-x^2}}{x - \arctan\left(x + \frac{1}{6}x^3\right) + 4^{-\frac{1}{3x}}}$$

Cenno della risoluzione
$\sin^2 x = (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$.
$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$
Quindi il numeratore diventa

$$NUM. = x^a - x^2 + \frac{x^4}{6} + o(x^4).$$

$\arctan(x + \frac{x^3}{6}) = (x + \frac{x^3}{6}) - \frac{1}{3}(x + \frac{x^3}{6})^3 + o(x^3) = x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$.
Il termine $4^{-\frac{1}{3x}} = o(x^3)$.
Quindi il denominatore diventa

$$DENOM. = \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Quindi il limite diventa

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^a - x^2 + \frac{x^4}{6} + o(x^4)}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}.$$

Quindi si hanno tre casi:
1) $a > 2 : = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2+o(x^2)}{\frac{x^3}{6}+o(x^3)} = -\infty$
2) $a = 2 : = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^4}{6}+o(x^4)}{\frac{x^3}{6}+o(x^3)} = 0$
2) $a < 2 : = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^a+o(x^a)}{\frac{x^3}{6}+o(x^3)} = +\infty$.

Esercizio 3 Calcolare il seguente integrale definito

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2x) + \sin x}{\cos^2 x - 5\cos x + 6}\, dx.$$

Cenno della risoluzione Tenendo conto che $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$ raccogliendo al numeratore $\sin x$ e usando la sostituzione $\cos x = y$ l'integrale diventa

$$-\int_1^0 \frac{2y+1}{y^2 - 5y + 6}\, dy = \int_0^1 \frac{2y+1}{y^2 - 5y + 6}\, dy.$$

Tendo conto che $y^2 - 5y + 6 = (y-3)(y-2)$ la funzione razionale si può decomporre:

$$\frac{2y+1}{(y-3)(y-2)} = \frac{A}{y-3} + \frac{B}{y-2}$$

con $A = 7$ e $B = -5$ e si ottiene così

$$\int_0^1 \frac{2y+1}{y^2 - 5y + 6}\, dy = \int_0^1 \frac{7}{y-3} dy - \int_0^1 \frac{5}{y-2}\, dy = 7\log 2 - 7\log 3 + 5\log 2 = 12\log 2 - 7\log 3.$$

TEMA 2

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{\frac{2}{\log(x^2-4)}}$$

(a) Determinare il dominio di f, eventuali simmetrie e segno.

(b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f, eventuali punti in cui è possibile prolungare la funzione.

(c) Studiare la continuità e la derivabilità di f; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f. Calcolare i limiti di f', se significativi.

(d) Disegnare un grafico qualitativo di f in tutto il dominio.

Non è richiesto lo studio della convessità.

Cenno della risoluzione

La funzione è definita in $D = (]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[) \setminus \{\pm\sqrt{5}\}$. È sempre positiva e pari quindi si studia per gli $x > 0$ e poi si considera la simmetrica rispetto all'asse delle y.
$\lim_{x\to 2} f(x) = 1$.
$\lim_{x\to(\sqrt{5})^+} f(x) = +\infty$ (si noti che in questo caso $\log(x^2-4) \to 0^+$).
$\lim_{x\to(\sqrt{5})^-} f(x) = 0$ (si noti che in questo caso $\log(x^2-4) \to 0^-$).
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$. (asintoto orizzontale)
L'espressione della derivata prima è:

$$f'(x) = e^{\frac{2}{\log(x^2-4)}} \frac{3}{\log^2(x^2-4)} \frac{1}{x^2-4}(-2x).$$

Quindi $f(x)$ è strettamente decrescente nei due intervalli $]2, \sqrt{5}[$, $]\sqrt{5}, +\infty[$. La funzione non ha min e max relativi ed assoluti (se si prolunga per continuità in 2^+ e in $\sqrt{5}^-$ ha max rel. in 2 e min rel. e assoluto in $\sqrt{5}$). $\inf f = 0$, $\sup f = +\infty$. Studiamo ora gli attacchi agli estremi del dominio dove il limite della funzione è finito.
$\lim_{x\to 2} f'(x) = +\infty$.
$\lim_{x\to(\sqrt{5})^-} f'(x) = 0$.
Per calcolare quest'ultimo limite si possono usare gli argomenti usati nella sol. dell'Es.1 del Tema 1.

Quindi f si può estendere ad una funzione continua e derivabile con derivata continua in tutto $\mathbb{R}$.

$$f''(x) = \frac{-9\cos(3x)}{(\cos^2(3x)+1)^2}\,(\cos^2(3x)+1+2\sin^2(3x)).$$

Quindi f è concava in $[0, \frac{\pi}{6}[$ e convessa in $]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}[$ e ha un flesso in $x = \frac{\pi}{6}$.

Esercizio 2

Calcolare il seguente integrale definito

$$\int_0^{(\tan 1)/2} \log\left(1+\arctan^2(2x)\right)\,\frac{1}{1+4x^2}\,dx.$$

Facoltativo: dimostrare che $\nexists\ c \in [0, (\tan 1)/4]$ tale che $\int_0^c \log(1+\arctan^2(2x))\,\frac{1}{1+4x^2}\,dx = 2$.

Cenno della risoluzione

Con la sostituzione $y = \arctan(2x)$ (per cui $dy = \frac{2}{1+4x^2}\,dx$ e $y(0) = 0$, $y((\tan 1)/2) = 1$) l'integrale diventa

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \log\left(1+y^2\right)\,dy = \frac{1}{2}\left\{ y\log(1+y^2)\big]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{y^2}{1+y^2}\,dy \right\} = \frac{1}{2}\left\{ y\log(1+y^2) - 2y + 2\arctan y\big]_0^1 \right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\log 2 + \frac{\pi}{4} - 1,$$

dove nel primo passaggio si è integrato per parti.

Esercizio 3

Si consideri la successione

$$a_n = \frac{2\cdot n^5 + 5n\cdot 2^n + n!}{n^{n+1}\cdot\log(1+\frac{3}{n}) + n\cdot(-1)^{n+1}}.$$

(a) Calcolare il limite $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

(b) Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

Cenno della risoluzione

Per la scala delle successioni infinite, $2\cdot n^5$, $5n\cdot 2^n = o(n!)$. Inoltre usando Mac-Laurin e la scala delle successioni infinite, $n^{n+1}\cdot\log(1+\frac{3}{n}) = n^{n+1}(\frac{3}{n}+o(\frac{3}{n})) = 3n^n + o(n^n)$ e $n\cdot(-1)^{n+1} = o(n^n)$. Quindi

$$a_n \sim \frac{n!}{3n^n}$$

e $\lim_n a_n = 0$ sempre per la scala. Inoltre per il teorema di confronto asintotico la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ converge se e solo se converge la serie $\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{n^n}$. Usando il criterio del rapporto per quest'ultima:

$$\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\,\frac{n^n}{n!} = \ldots = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e}.$$

Poichè $\frac{1}{e} < 1$, la serie data converge.

ANALISI MATEMATICA 1

Commissione F. Albertini, P. Mannucci, C. Marchi, M. Motta
Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 15-07-2009

TEMA 1

Esercizio 1

Si consideri la funzione

$$f(x) = |\arctan x|^{\arctan x}$$

(a) Determinare il dominio di f, eventuali simmetrie, periodicità e segno.

(b) Determinare eventuali estendibilità per continuità; nel caso proseguire nello studio della funzione estesa.

(c) Determinare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti di f.

(d) Studiare la continuità e la derivabilità di f; determinare gli intervalli di monotonia, i punti estremi e gli eventuali punti di massimo e di minimo, relativo e assoluto, di f. Calcolare i limiti di f', individuando gli eventuali punti angolosi e cuspidi. (Non è richiesto lo studio della derivata seconda nè quello degli intervalli di convessità e di concavità).

(e) Disegnare un grafico qualitativo di f in tutto il dominio.

Esercizio 2 Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^\alpha} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) e^{\frac{1}{\sqrt{n}}}.$$

1. dire per quali $\alpha > 0$ converge assolutamente;

2. dire per quali $\alpha > 0$ converge semplicemente.

Esercizio 3 Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2y' + y = e^{-x} \\ y(0) = \frac{1}{2} \\ y'(0) = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Tempo: due ore e mezza.

ANALISI MATEMATICA 1

Commissione F. Albertini, P. Mannucci, C. Marchi, M. Motta

Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 15-09-2009

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{1}{1+\cos x}}}{1+\cos x}$$

(a) Determinare il dominio di f, eventuali simmetrie, periodicità e segno.

(b) Determinare i limiti agli estremi del dominio, eventuali asintoti di f.

(c) Studiare la continuità e la derivabilità di f; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f. I limiti di f', se significativi. (Non è richiesto lo studio della derivata seconda nè quello degli intervalli di convessità e di concavità).

(d) Disegnare un grafico qualitativo di f in tutto il dominio.

Esercizio 2 Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{e^{x-2} - x + \cos(x-2) + (x-2)^4 \sin\left(\frac{1}{x-2}\right)}{\log(x-1) - (x-2)}.$$

Esercizio 3 Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\cos n + 2) \left(\frac{\sqrt{1+\alpha}}{|1-\alpha|}\right)^n$$

converge.

Tempo: due ore e mezza.

MATEMATICA A

Commissione Albertini, Mannucci, Motta, Zanella

Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Prova scritta – 5 settembre 2007

TEMA 1

1) [*10 punti*] Studiare la funzione

$$f(x) = x\,\frac{\log|x| - 1}{\log x + 1}.$$

(Determinare il dominio D; studiarne il segno; calcolare i limiti per x che tende ai punti di frontiera del dominio e trovare gli eventuali asintoti; studiare la continuità e la derivabilità di f ed eventuali attacchi di f'; studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali estremi relativi ed assoluti; studiarne la convessità e trovare gli eventuali flessi; disegnare un abbozzo motivato del grafico di f.)

2) [*10 punti*] Per ogni valore del parametro reale $\alpha \geq 0$, determinare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n^2}}(\sin n + 2)^2}{n^{\log(1+\alpha)}}.$$

3) [*10 punti*] Dopo aver verificato che esiste finito, si calcoli l'integrale

$$\int_0^3 \frac{x+2}{\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}}\,dx.$$

Tempo: due ore e mezza. Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. È permesso usare solo un foglio A4 personale.

MATEMATICA A

Commissione Albertini, Mannucci, Motta, Zanella

Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Prova scritta – 24 luglio 2007

TEMA 1

1) [*12 punti*] Studiare la funzione

$$f(x) = e^{\sinh\left(\frac{x^2+1}{2-x}\right)}$$

(Dominio, segno, limiti alla frontiera, eventuali asintoti, continuità e derivabilità, crescenza e decrescenza, eventuali minimi e massimi relativi ed assoluti, eventuali attacchi di f', abbozzo del grafico. Non è richiesto lo studio di f''.)

2) [*8 punti*] Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{C}$ e disegnare le soluzioni sul piano di Gauss

$$\mathrm{Im}(iz^2 + 2\overline{z}) > \mathrm{Re}(z\overline{z}).$$

3) [*10 punti*] (i) Calcolare l'integrale indefinito della funzione

$$f(x) = \frac{1}{|e^x - e| - 7e^{-x}}, \qquad -\infty < x \leq 1.$$

(ii) Determinare la primitiva di f, $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ tale che $F(1) = 0$.

Tempo: due ore e mezza. Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. È permesso usare solo un foglio A4 personale.

MATEMATICA A

Canali 1 e 2, Commissione F. Albertini, M. Motta

Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 23 settembre 2008

Esercizio 1 Studiare la funzione

$$f(x) = \sqrt{4\cos^2 x - 1} + |\sin x|.$$

(a) Determinare il dominio di f, eventuali simmetrie, e periodicità. Studiare il segno di f.

(b) Determinare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti di f.

(c) Studiare la continuità e la derivabilità di f; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f. I limiti di f', se significativi. Non è richiesto lo studio della convessità di f.

(d) Disegnare un grafico qualitativo di f in tutto il dominio.

Esercizio 2 Calcolare per ogni valore reale del parametro α il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\alpha^2 x^2 \log(x) + x\sin(x)}{x^4 \log(1+x) + e^{x^2+x} - 1 - x - \alpha x}.$$

Esercizio 3 Determinare la primitiva $F : [e, +\infty[\to \mathbb{R}$ della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x(\log^2 x + |1 - \log x|)}$$

che soddisfa la condizione $F(e) = \sqrt{3}$.

Tempo: due ore e mezza. Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. È permesso usare solo un foglio A4 personale.

MATEMATICA A

Canali 1 e 2, Commissione F. Albertini, M. Motta

Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 9 settembre 2008

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}\right) - \frac{x}{4}$$

(a) Determinare il dominio di f, eventuali simmetrie, e periodicità. Non è richiesto lo studio del segno di f.

(b) Determinare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti di f.

(c) Studiare la continuità e la derivabilità di f; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f. I limiti di f', se significativi.

(d) Studiare la convessità e determinare gli eventuali flessi.

(e) Disegnare un grafico qualitativo di f in tutto il dominio.

Esercizio 2 Si consideri la successione

$$a_n = \frac{\frac{a}{n^{3/2}} - 6\left(\frac{a^2}{\sqrt{n}} - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) - \frac{2}{n^2}}{\left(1+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}\right)^{\sqrt{n}} - 1}$$

(a) Calcolare il limite $\lim_{n\to+\infty} a_n$ al variare del parametro $a \in \mathbb{R}$.

(b) Discutere la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ per ogni $a \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3 (a) Determinare e disegnare nel piano di Gauss l'insieme $A_1 \subseteq \mathbb{C}$ di tutti i numeri complessi che soddisfano la seguente disequazione:

$$|z| - \frac{1}{2} \leq 0.$$

(b) Determinare e disegnare nel piano di Gauss l'insieme $A_2 \subseteq \mathbb{C}$ di tutti i numeri complessi che soddisfano la seguente disequazione:

$$\left|\frac{|z|+i}{z+\bar{z}+4}\right| \leq 1/2.$$

(c) Determinare e disegnare nel piano di Gauss l'insieme $A \subseteq \mathbb{C}$ di tutti i numeri complessi che soddisfano la seguente disequazione:

$$\left(|z| - \frac{1}{2}\right)\left(\left|\frac{|z|+i}{z+\bar{z}+4}\right| - 1/2\right) \leq 0.$$

Tempo: due ore e mezza. Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. È permesso usare solo un foglio A4 personale.

MATEMATICA A

Commissione Albertini, Mannucci, Motta, Zanella

Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Prova scritta – 15 dicembre 2006

TEMA 1

1) [*12 punti*] Studiare la funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{|x-1|}{x}\right) - 2x$$

(determinare il dominio D; calcolare i limiti per x che tende agli estremi – finiti o infiniti – del dominio e gli eventuali asintoti; determinare i punti in cui f è continua e i punti in cui è derivabile; studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali estremi relativi ed assoluti; studiarne la convessità e gli eventuali flessi; disegnare un abbozzo motivato del grafico di f, non è richiesto lo studio del segno di f).

2) [*8 punti*] Esprimere in forma algebrica e disegnare sul piano di Gauss le soluzioni complesse della seguente equazione:

$$z^4 + 2(3+6i)z^2 + 5 + 12i = 0.$$

3) [*10 punti*] (i) Determinare i valori del parametro reale α per i quali converge il seguente integrale improprio:

$$\int_1^{+\infty} \frac{(1+x^3)^{1-\alpha}}{x^{2-\alpha}(\log^2 x + 2\sqrt{2}\log x + 2)}\,dx.$$

(ii) Calcolare l'integrale per $\alpha = 1$.

4) Esercizio *facoltativo* (da svolgersi per ultimo, terminati gli altri esercizi, non viene valutato per l'ammissione all'orale).

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{x^2} y, \\ y(1) = \alpha. \end{cases}$$

Decidere per quali valori del parametro reale α la soluzione è iniettiva. Posto $\alpha = 2$, indicata con g la funzione inversa di y (ristretta al proprio dominio e immagine), calcolare $g'(2)$.

MOTIVARE LE RISPOSTE.

Tempo: due ore e mezza. Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. È permesso usare solo un foglio A4 personale.

MATEMATICA A

Commissione Albertini, Mannucci, Motta, Zanella

Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Prova scritta – 15 dicembre 2006

TEMA 2

1) [*12 punti*] Studiare la funzione

$$f(x) = x - \log\left(\frac{|x-1|}{x}\right)$$

(determinare il dominio D; calcolare i limiti per x che tende agli estremi – finiti o infiniti – del dominio e gli eventuali asintoti; determinare i punti in cui f è continua e i punti in cui è derivabile; studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali estremi relativi ed assoluti; studiarne la convessità e gli eventuali flessi; disegnare un abbozzo motivato del grafico di f, non è richiesto lo studio del segno di f).

2) [*8 punti*] Esprimere in forma algebrica e disegnare sul piano di Gauss le soluzioni complesse della seguente equazione:

$$z^4 + 2(3-6i)z^2 + 5 - 12i = 0.$$

3) [*10 punti*] (i) Determinare i valori del parametro reale α per i quali converge il seguente integrale improprio:

$$\int_1^{+\infty} \frac{(1+x^3)^{1-\alpha}}{x^{2-\alpha}(\log^2 x + 2\sqrt{3}\log x + 3)}\,dx.$$

(ii) Calcolare l'integrale per $\alpha = 1$.

4) Esercizio *facoltativo* (da svolgersi per ultimo, terminati gli altri esercizi, non viene valutato per l'ammissione all'orale).

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{x^2} y, \\ y(1) = \alpha. \end{cases}$$

Decidere per quali valori del parametro reale α la soluzione è iniettiva. Posto $\alpha = 2$, indicata con g la funzione inversa di y (ristretta al proprio dominio e immagine), calcolare $g'(2)$.

MOTIVARE LE RISPOSTE.

Tempo: due ore e mezza. Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. È permesso usare solo un foglio A4 personale.

MATEMATICA A

Commissione Albertini, Mannucci, Motta, Zanella

Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Prova scritta – 15 dicembre 2006

TEMA 3

1) [*12 punti*] Studiare la funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{|x|}{x+1}\right) - 2x$$

(determinare il dominio D; calcolare i limiti per x che tende agli estremi – finiti o infiniti – del dominio e gli eventuali asintoti; determinare i punti in cui f è continua e i punti in cui è derivabile; studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali estremi relativi ed assoluti; studiarne la convessità e gli eventuali flessi; disegnare un abbozzo motivato del grafico di f, non è richiesto lo studio del segno di f).

2) [*8 punti*] Esprimere in forma algebrica e disegnare sul piano di Gauss le soluzioni complesse della seguente equazione:

$$z^4 - 2(3+6i)z^2 + 5 + 12i = 0.$$

3) [*10 punti*] (i) Determinare i valori del parametro reale α per i quali converge il seguente integrale improprio:

$$\int_1^{+\infty} \frac{(1+x^3)^{1-\alpha}}{x^{2-\alpha}(\log^2 x + 2\sqrt{5}\log x + 5)}\, dx.$$

(ii) Calcolare l'integrale per $\alpha = 1$.

4) Esercizio *facoltativo* (da svolgersi per ultimo, terminati gli altri esercizi, non viene valutato per l'ammissione all'orale).

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{x^2} y, \\ y(1) = \alpha. \end{cases}$$

Decidere per quali valori del parametro reale α la soluzione è iniettiva. Posto $\alpha = 2$, indicata con g la funzione inversa di y (ristretta al proprio dominio e immagine), calcolare $g'(2)$.

MOTIVARE LE RISPOSTE.

Tempo: due ore e mezza. Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. È permesso usare solo un foglio A4 personale.

MATEMATICA A

Commissione Albertini, Mannucci, Motta, Zanella

Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Prova scritta – 15 dicembre 2006

TEMA 4

1) [*12 punti*] Studiare la funzione

$$f(x) = x - \log\left(\frac{|x|}{x+1}\right)$$

(determinare il dominio D; calcolare i limiti per x che tende agli estremi – finiti o infiniti – del dominio e gli eventuali asintoti; determinare i punti in cui f è continua e i punti in cui è derivabile; studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali estremi relativi ed assoluti; studiarne la convessità e gli eventuali flessi; disegnare un abbozzo motivato del grafico di f, non è richiesto lo studio del segno di f).

2) [*8 punti*] Esprimere in forma algebrica e disegnare sul piano di Gauss le soluzioni complesse della seguente equazione:

$$z^4 - 2(3-6i)z^2 + 5 - 12i = 0.$$

3) [*10 punti*] (i) Determinare i valori del parametro reale α per i quali converge il seguente integrale improprio:

$$\int_1^{+\infty} \frac{(1+x^3)^{1-\alpha}}{x^{2-\alpha}(\log^2 x + 2\sqrt{6}\log x + 6)}\, dx.$$

(ii) Calcolare l'integrale per $\alpha = 1$.

4) Esercizio *facoltativo* (da svolgersi per ultimo, terminati gli altri esercizi, non viene valutato per l'ammissione all'orale).

Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^{x^2} y, \\ y(1) = \alpha. \end{cases}$$

Decidere per quali valori del parametro reale α la soluzione è iniettiva. Posto $\alpha = 2$, indicata con g la funzione inversa di y (ristretta al proprio dominio e immagine), calcolare $g'(2)$.

MOTIVARE LE RISPOSTE.

Tempo: due ore e mezza. Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. È permesso usare solo un foglio A4 personale.

Soluzioni del tema 1.

1) La funzione è definita per $\frac{|x-1|}{x} > 0$, $x \neq 0$, quindi il dominio D è

$$D = \{x > 0, x \neq 1\}.$$

Limiti finiti e infiniti:
$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$,
$\lim_{x\to 1^\pm} f(x) = -\infty$,
$\lim_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$,
$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -2$, $\lim_{x\to +\infty} f(x) + 2x = 0$.
Quindi la retta $y = -2x$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$.
La funzione è continua e derivabile nel suo dominio di definizione perché somma, quoziente e composizione di funzioni continue e derivabili.
$f'(x) = \frac{1-2x^2+2x}{x(x-1)}$ se $x > 1$,
$f'(x) = \frac{-1+2x^2-2x}{x(1-x)}$ se $x < 1$
quindi

$$f'(x) = \frac{1-2x^2+2x}{x(x-1)}, \ \forall x \in D.$$

Studiando il segno di $1 - 2x^2 + 2x$, si ottiene che f è strettamente decrescente in $(0, 1)$ e in $(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, +\infty)$, strettamente crescente in $(1, \frac{1+\sqrt{3}}{2})$. Ha un punto di massimo relativo in $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ mentre non esistono punti di massimo e minimo assoluto in quanto $\sup f = +\infty$, $\inf f = -\infty$.
La derivata seconda è

$$f''(x) = \frac{1-2x}{x^2(x-1)^2}, \ \forall x \in D.$$

Quindi f è concava se $x > 1$ e se $x \in (1/2, 1)$ mentre è convessa in $(0, 1/2)$ e ha un punto di flesso in $x = 1/2$.

2) Ponendo $w = z^2$, si ha un'equazione di secondo grado. La formula ridotta dà

$$w = -3 - 6i \pm \sqrt{(3+6i)^2 - 5 - 12i} = -3 - 6i \pm \sqrt{-32 + 24i}. \tag{1}$$

Per trovare le radici, si risolve l'equazione $(x + iy)^2 = -32 + 24i$, $x, y \in \mathbb{R}$, da cui

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -32 \\ 2xy = 24, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^4 + 32x^2 - 144 = 0 \\ y = 12/x. \end{cases}$$

Risolvendo l'equazione biquadratica si ottiene $x^2 = -16 \pm 20$, di cui solo la soluzione positiva è accettabile. In definitiva, le due radici nella (1) sono $\pm(2 + 6i)$. Sostituendo, otteniamo le due equazioni $z^2 = -1$ e $z^2 = -5-12i$. Le soluzioni della prima sono evidentemente $z_1 = i$ e $z_2 = -i$. Per risolvere la seconda, si imposta un sistema analogo a quello precedente:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = -12, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x^4 + 5x^2 - 36 = 0 \\ y = -6/x. \end{cases}$$

Come prima, la biquadratica ha solo due soluzioni reali, $x = \pm 2$; corrispondentemente, $y = \mp 3$. Concludendo, otteniamo le soluzioni $z_3 = 2 - 3i$ e $z_4 = -2 + 3i$. La rappresentazione nel piano di Gauss consiste nell'insieme dei quattro punti di coordinate $(0, 1)$, $(0, -1)$, $(2, -3)$, $(-2, 3)$.

3) (i) La funzione integranda $f(x) = \frac{(1+x^3)^{1-\alpha}}{x^{2-\alpha}(\log^2 x+2\sqrt{2}\log x+2)}$ è definita, positiva e continua su tutto l'intervallo $[1,+\infty[$. L'integrale quindi converge se e solo se f è integrabile in senso generalizzato in un intorno di $+\infty$. Poichè nell'intorno di $+\infty$ si ha

$$f(x) \sim \frac{x^{3(1-\alpha)}}{x^{2-\alpha}\log^2 x} = \frac{1}{x^{2-\alpha-3+3\alpha}\log^2 x} = \frac{1}{x^{2\alpha-1}\log^2 x},$$

dal criterio di confronto asintotico con la funzione $f(x) = \frac{1}{x^a \log^b x}$ dove $a = 2\alpha - 1$ e $b = 2$, segue che l'integrale converge se e solo se $2\alpha - 1 \geq 1$, cioè per $\alpha \geq 1$.

(ii) Per $\alpha = 1$, l'integrale di f tra 1 e x (con $x > 1$), diventa

$$\int_1^x \frac{1}{t(\log^2 t + 2\sqrt{2}\log t + 2)}\,dt = \int_0^{\log x} \frac{1}{(y+\sqrt{2})^2}\,dy = \left[-\frac{1}{y+\sqrt{2}}\right]_0^{\log x} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{\log x + \sqrt{2}},$$

dove la prima uguaglianza si ottiene operando la sostituzione $y = \log t$. Passando al limite per $x \to +\infty$, risulta infine

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(\log^2 t + 2\sqrt{2}\log t + 2)}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t(\log^2 t + 2\sqrt{2}\log t + 2)}\,dt = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Università degli Studi di Padova
sede di Vicenza
Prova scritta di Matematica A
del 12 dicembre 2005

GIUSTIFICARE TUTTE LE RISPOSTE

(1) Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\left(x + 1 + e^{|x+1|}\right)$$

(a) Determinare il dominio di f, il segno di f ed eventuali simmetrie.

(b) Determinare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti di f.

(c) Studiare la continuità e la derivabilità di f; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f.

(d) Calcolare i limiti di f', se significativi e disegnare un grafico qualitativo di f.

(e) (facoltativo) Studiare concavità e convessità della funzione f.

(2) Determinare l'insieme A dei numeri complessi z che soddisfano la seguente disequazione:

$$\left|\frac{z}{\bar{z} + i\mathrm{Re} z}\right| \geq 1.$$

Disegnare A nel piano complesso.

(3)

(a) Discutere al variare del parametro $a \in \mathbf{R}$ la convergenza del seguente integrale improprio

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\tan^{|a|/2} x\,(\tan^2 x + 1)}{x^{2-a}(1 + \sqrt{\tan x})}\, dx.$$

(b) Calcolare l'integrale per $a = 2$.

Università degli Studi di Padova
sede di Vicenza
Esame di Matematica A del 11 gennaio 2005

GIUSTIFICARE TUTTE LE RISPOSTE

(1) Si consideri la funzione

$$f(x) = \log \frac{1}{1+\cos x} - \frac{1}{1+\cos x}$$

(a) Determinare il dominio, eventuali simmetrie, e periodicità di f.

(b) Determinare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti di f.

(c) Determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f ristretta a $(-\pi, \pi)$.

(d) Disegnare un grafico qualitativo di f.

(2) Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-3)^n}{3^{n+1} n \log(1+n) - 3^n n \sin\left(\frac{3}{n}\right)}.$$

(a) Studiare il segno della successione

$$b_n = 3^{n+1} n \log(1+n) - 3^n n \sin\left(\frac{3}{n}\right)$$

per n tendente a $+\infty$.

(b) Discutere la convergenza assoluta della serie data.

(c) Discutere la convergenza semplice della serie data. (Suggerimento: usare il punto (a))

(3) Per ogni $\alpha \neq -1$ si consideri la seguente equazione differenziale:

$$y'' - \alpha y = \cos(x).$$

(a) Determinare le soluzioni per ogni $\alpha \neq -1$.

(b) Dire se esistono soluzioni $y(x)$, tali che $\lim_{x\to+\infty} y(x) = +\infty$. In caso affermativo, determinarle.

(c) Fissato $\alpha = 0$, dire se esistono soluzioni limite. In caso affermativo, determinarle.

(d) (*facoltativo*) Determinare le soluzioni per $\alpha = -1$.

MATEMATICA A

Commissione Albertini, Mannucci, Motta, Zanella

Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Prova scritta – 8 gennaio 2007

TEMA 1

1) [*10 punti*] Studiare la funzione

$$f(x) = |x-3| - \arctan\left(\frac{x-2}{|x-3|}\right)$$

(determinare il dominio D; calcolare i limiti per x che tende agli estremi – finiti o infiniti – del dominio e gli eventuali asintoti; studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali estremi relativi ed assoluti; determinare i punti in cui f è derivabile; studiarne la convessità e gli eventuali flessi; disegnare un abbozzo motivato del grafico di f, non è richiesto lo studio del segno di f).

2) [*10 punti*] Calcolare il limite seguente al variare del parametro reale α:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} + 3^{x^2} - 2 - \alpha x^2}{\log(1+x^2) - x^2 - 5^{-(1/x^2)}}.$$

3) [*10 punti*] Trovare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = (y-1)^2 \dfrac{6x+3}{x^2+x+1} \\ y(0) = 4 \end{cases}$$

Tempo: due ore e mezza. Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. È permesso usare solo un foglio A4 personale.

MATEMATICA A

Commissione Albertini, Mannucci, Motta, Zanella

Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Prova scritta – 8 gennaio 2007

TEMA 2

1) [*10 punti*] Studiare la funzione

$$f(x) = |x-2| - \arctan\left(\frac{x-1}{|x-2|}\right)$$

(determinare il dominio D; calcolare i limiti per x che tende agli estremi – finiti o infiniti – del dominio e gli eventuali asintoti; studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali estremi relativi ed assoluti; determinare i punti in cui f è derivabile; studiarne la convessità e gli eventuali flessi; disegnare un abbozzo motivato del grafico di f, non è richiesto lo studio del segno di f).

2) [*10 punti*] Calcolare il limite seguente al variare del parametro reale α:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} + 5^{x^2} - 2 - \alpha x^2}{\log(1+x^2) - x^2 - 3^{-\frac{1}{x^2}}}.$$

3) [*10 punti*] Trovare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{4x+4}{x^2+2x+2}(2-y)^2 \\ y(-1) = 1 \end{cases}$$

Tempo: due ore e mezza. Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. È permesso usare solo un foglio A4 personale.

MATEMATICA A

Commissione Albertini, Mannucci, Motta, Zanella

Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Prova scritta – 8 gennaio 2007

TEMA 3

1) [*10 punti*] Studiare la funzione

$$f(x) = |x+3| + \arctan\left(\frac{x+2}{|x+3|}\right)$$

(determinare il dominio D; calcolare i limiti per x che tende agli estremi – finiti o infiniti – del dominio e gli eventuali asintoti; studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali estremi relativi ed assoluti; determinare i punti in cui f è derivabile; studiarne la convessità e gli eventuali flessi; disegnare un abbozzo motivato del grafico di f, non è richiesto lo studio del segno di f).

2) [*10 punti*] Calcolare il limite seguente al variare del parametro reale α:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} + 3^{x^2} - 2 - \alpha x^2}{\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} - 5^{-\frac{1}{x^2}}}.$$

3) [*10 punti*] Trovare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = (y-1)^2 \dfrac{8x+2}{2x^2+x+1} \\ y(0) = 3 \end{cases}$$

Tempo: due ore e mezza. Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. È permesso usare solo un foglio A4 personale.

MATEMATICA A

Commissione Albertini, Mannucci, Motta, Zanella

Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Prova scritta – 8 gennaio 2007

TEMA 4

1) [*10 punti*] Studiare la funzione

$$f(x) = |x+2| + \arctan\left(\frac{x+1}{|x+2|}\right)$$

(determinare il dominio D; calcolare i limiti per x che tende agli estremi – finiti o infiniti – del dominio e gli eventuali asintoti; studiare la monotonia di f e determinarne gli eventuali estremi relativi ed assoluti; determinare i punti in cui f è derivabile; studiarne la convessità e gli eventuali flessi; disegnare un abbozzo motivato del grafico di f, non è richiesto lo studio del segno di f).

2) [*10 punti*] Calcolare il limite seguente al variare del parametro reale α:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} + 5^{x^2} - 2 - \alpha x^2}{\cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} - 3^{-\frac{1}{x^2}}}.$$

3) [*10 punti*] Trovare la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{4x+6}{x^2+3x+3}(2-y)^2 \\ y(-1) = 1 \end{cases}$$

Tempo: due ore e mezza. Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. È permesso usare solo un foglio A4 personale.

Università degli Studi di Padova
sede di Vicenza
Esame di Matematica A del 14 dicembre 2004

GIUSTIFICARE TUTTE LE RISPOSTE

(1) Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1} e^{\frac{x}{x+1}}$$

(a) Determinare il dominio, i limiti agli estremi del dominio e gli eventuali asintoti di f.

(b) Determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f.

(c) Disegnare un grafico qualitativo di f.

(2) Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^{(x+x^2)} - 1 - \sin(x)}{x^2 + \arctan(x^3) + x^3 \sin(\frac{1}{x})}.$$

(3) Si consideri il seguente integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^{a^2-1}(x^2 + |1-2x|^a)}.$$

(a) Determinare i valori del parametro $a > 0$ per i quali tale integrale converge.

(b) Calcolare l'integrale per $a = 1$.

Università degli Studi di Padova
sede di Vicenza
Esame di Analisi 1 e di Matematica 1
del 21 giugno 2005

GIUSTIFICARE TUTTE LE RISPOSTE

(1) Si consideri la funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 8x + 15} - |x - 1|$$

(a) Determinare il dominio di f.

(b) Determinare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti di f.

(c) Studiare la continuità e la derivabilità di f; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f.

(d) Calcolare i limiti di f', se significativi.

(e) Disegnare un grafico qualitativo di f. (Non è richiesto lo studio di f'')

(2) (a) Calcolare, se esiste, il limite della successione

$$a_n = (-1)^n n^2 \left(1 - n \arctan\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \frac{(-1)^{n+1}}{3}$$

per n tendente a $+\infty$.
(b) Discutere la convergenza semplice e assoluta della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

(3) Calcolare la primitiva $F : [-1, +\infty[\to \mathbf{R}$ della funzione seguente

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{|x-1| + 2}$$

tale che $F(-1) = 2\pi$.

Università degli Studi di Padova
sede di Vicenza
Prova scritta di Matematica A
del 5 Settembre 2006

GIUSTIFICARE TUTTE LE RISPOSTE

(1) Si consideri la funzione

$$f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) e^{\tan x}$$

(a) Determinare il dominio di f, il segno di f, eventuali simmetrie e periodicità.

(b) Determinare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti di f.

(c) Studiare la continuità e la derivabilità di f; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f.

(d) Calcolare i limiti di f', se significativi.

(e) Disegnare un grafico qualitativo di f in tutto il dominio. (Non è richiesto lo studio di f'')

(2) Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{y(x)}{2x} - \frac{e^x}{2} y^3, \\ y(-1) = 1. \end{cases}$$

(a) Determinare la soluzione in un intorno di $x_0 = -1$.

(b) Trovare il dominio massimale della soluzione.

(3) Data la successione

$$a_n = \left(\sqrt{1 + 2\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)} - e^{-\frac{1}{n^a}} \right) n^{1-a} \qquad \text{per ogni } n \in \mathbf{N},$$

(a) discutere la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ al variare del parametro $a > 0$.

(b) (Facoltativo) Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$ nel caso $a = 1$.

MATEMATICA A

Commissione F. Albertini, M. Motta e G. Zampieri

Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 10 dicembre 2007

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{x+5}{|x+4|}\right) - \frac{x+5}{|x+4|}.$$

(a) Determinare il dominio di f, eventuali simmetrie, periodicità e segno.

(b) Determinare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti.

(c) Studiare la continuità e la derivabilità ; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto. I limiti di f', se significativi.

(d) Studiare la convessità e determinare gli eventuali flessi.

(e) Abbozzare il grafico in tutto il dominio.

Esercizio 2 Si calcoli il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\sqrt{x}} + \sqrt{x^3+3} - 4^x + \cos\left(3e^{x^2}+2\right)}{\sinh(x) + (\sqrt{x})^x + 5^x}.$$

Si ricordi che $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Esercizio 3 Si calcoli il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(\sqrt{x} - \tan(\sqrt{x}))}{(e^x - 1)\sqrt{x}}.$$

Esercizio 4 Si studi la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}.$$

Tempo: due ore e mezza.

MATEMATICA A

Commissione F. Albertini, M. Motta e G. Zampieri

Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 10 dicembre 2007

TEMA 2

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{x+3}{|x+2|} - \log\left(\frac{x+3}{|x+2|}\right).$$

(a) Determinare il dominio di f, eventuali simmetrie, periodicità e segno.

(b) Determinare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti.

(c) Studiare la continuità e la derivabilità; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto. I limiti di f', se significativi.

(d) Studiare la convessità e determinare gli eventuali flessi.

(e) Abbozzare il grafico in tutto il dominio.

Esercizio 2 Si calcoli il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sinh(x) + (\sqrt{x})^x + 3^x}{\sqrt{x^3+1} + 5^x + \cos\left(5e^{x^2} - 5\right) + x^{\sqrt{x}}}.$$

Si ricordi che $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Esercizio 3 Si calcoli il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x - \tan(x))(e^x)}{1 - \cos(x)}.$$

Esercizio 4 Si studi il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n}}{\sqrt{n}}.$$

Tempo: due ore e mezza.

Università degli Studi di Padova
sede di Vicenza
Esame di Matematica A/Analisi 1 del 19/9/2005

SCHEMA DI SOLUZIONE

(1) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$$

(a) Determinare il dominio, il segno, eventuali simmetrie, continuità, limiti agli estremi del dominio, e gli eventuali asintoti di f.

(b) Determinare la derivabilità, gli eventuali punti angolosi, gli intervalli di monotonia, e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f.

(c) Determinare gli intervalli di concavità e convessità e gli eventuali punti di flesso di f.

Soluzione: Dominio: deve essere:

$$\left|\tfrac{1-x^2}{1+x^2}\right| \leq 1 \iff -1 \leq \tfrac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1 \iff -1-x^2 \leq 1-x^2 \leq 1+x^2$$
$$\iff -1 \leq 1 \leq 1+2x^2$$

disuguaglianze chiaramente soddisfatte per ogni $x \in \mathbb{R}$. Il dominio è quindi tutto $\mathbb{R}$.
Simmetrie: chiaramente f è pari.
Continuità: Essendo f composizione di funzioni continue è continua.
Derivabilità: La funzione $g(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$ è ovunque derivabile; arcsin è derivabile in $(-1,1)$; quindi f è certamente derivabile, almeno per gli $x \in \mathbb{R}$ per cui $g(x) \neq \pm 1$; si ha $g(x) = 1 \iff x = 0$, mentre $g(x) = -1$ non è mai verificato. Perciò f è certamente derivabile in $\mathbb{R}/\{0\}$ e si ha:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-g^2(x)}} \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$

Per vedere se f è derivabile in 0 calcoliamo i limiti destro e sinistro di f' in $x = 0$; essendo f continua in $x = 0$ il limite destro, se esiste sarà la derivata destra, e quello sinistro la derivata sinistra; anzi essendo f' dispari, basta fare il limite destro, per $x \longrightarrow 0+$. Si noti che:

$$\sqrt{1-g^2(x)} = \sqrt{(1-g(x))(1+g(x))} \sim 2x \qquad \text{per} \qquad x \longrightarrow 0+$$

e in definitiva

$$\lim_{x\to 0\pm} f'(x) = \mp 2$$

e quindi 0 è punto angoloso per f.
Monotonia: $f'(x) < 0$ per $x > 0$; f è strettamente decrescente su $[0, +\infty)$; f è strettamente crescente su $-\infty, 0]$. Il punto $x = 0$ è di max assoluto, dove f vale $f(0) = \pi/2$.
Asintoti: essendo

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = -1$$

si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = -\pi/2$$

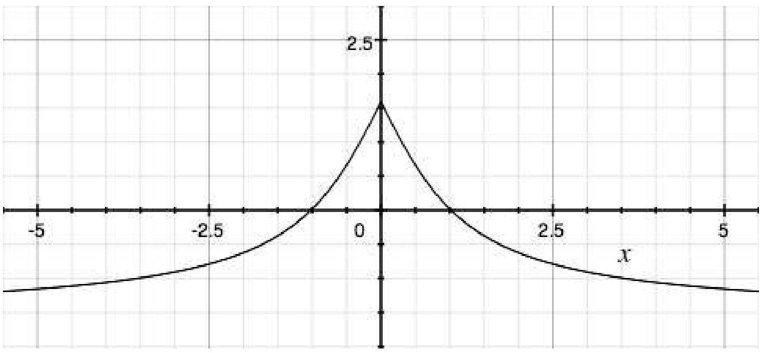
e quindi $y = -\pi/2$ è asintoto orizzontale bilatero per f; il valore $-\pi/2$ è l'estremo inferiore di f, ma non è raggiunto: f non ha minimo.
Convessità: per $x \neq 0$, si ha

$$f''(x) = \frac{1}{\sqrt{1-g^2(x)}}\left(\frac{g(x)\,(g'(x)^2)}{1-g^2(x)} + g''(x)\right)$$

calcoli diretti (anche se un pò lunghi) mostrano che

$$\frac{g(x)\,(g'(x)^2)}{1-g^2(x)} + g''(x) = \frac{8x^2}{(1+x^2)^3} > 0$$

pertanto f è strettamente convessa su $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
Abbozzo di grafico:



(2) Al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \longrightarrow 0+} \frac{1}{x^{4\alpha}} \left(1 - \frac{\sqrt{1 - \alpha x^2}}{\cos x} \right).$$

Soluzione: Dobbiamo calcolare

$$\lim_{x \longrightarrow 0+} \frac{\cos x - \sqrt{1 - \alpha x^2}}{x^{4\alpha} \cos x}.$$

Usando gli sviluppi di Mac Laurin si ottiene che

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5),$$
$$\sqrt{1 - \alpha x^2} = 1 - \frac{\alpha}{2}x^2 - \frac{\alpha^2}{8}x^4 + o(x^4).$$

Se $\alpha \neq 1$, si ha

$$\lim_{x \longrightarrow 0+} \frac{\cos x - \sqrt{1 + \alpha x^2}}{x^{4\alpha} \cos x} = \lim_{x \longrightarrow 0+} \frac{\frac{\alpha - 1}{2}x^2 + o(x^3)}{x^{4\alpha}} = \begin{cases} +\infty, & \text{se } \alpha > 1, \\ -\infty, & \text{se } \frac{1}{2} < \alpha < 1, \\ -\frac{1}{4}, & \text{se } \alpha = \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{se } \alpha < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Se $\alpha = 1$, si ha

$$\lim_{x \longrightarrow 0+} \frac{\cos x - \sqrt{1 + x^2}}{x^4 \cos x} = \lim_{x \longrightarrow 0+} \frac{\frac{1}{6}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \frac{1}{6}.$$

(3) Si consideri il seguente integrale improprio

$$\int_2^{+\infty} \frac{6x^{2a}}{(x-1)^2(x^2 + x^a + 1)} dx.$$

(a) Determinare i valori del parametro $a > 0$ per i quali tale integrale converge.

(b) Calcolare l'integrale per $a = 1$.

Soluzione: (a) Per ogni $a > 0$ la funzione integranda

$$f_a(x) = \frac{6x^{2a}}{(x-1)^2(x^2 + x^a + 1)}$$

è continua in $[2, +\infty[$. In un intorno di $+\infty$ si ha

$$f_a(x) \sim \begin{cases} 6x^{a-2}, & \text{se } a > 2, \\ 3, & \text{se } a = 2, \\ \frac{1}{x^{2(2-a)}}, & \text{se } 0 < a < 2. \end{cases}$$

Quindi dal criterio del confronto asintotico segue che l'integrale converge per $0 < a < 3/2$.
(b) Calcoliamo l'integrale indefinito

$$\int \frac{6x^2}{(x-1)^2(x^2+x+1)} dx.$$

Si può scomporre

$$\frac{6x^2}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C(2x+1)}{(x^2+x+1)} + \frac{D}{(x^2+x+1)}.$$

Facendo denominatore comune ed eguagliando i coefficienti delle varie potenze di x, si ottiene $A = 2$, $B = 2$, $C = -1$, $D = 1$. Quindi

$$\int \frac{6x^2}{(x-1)^2(x^2+x+1)} dx = \log \frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} - \frac{2}{x-1} + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \left(x + \frac{1}{2} \right) \right) + c.$$

In conclusione, l'integrale cercato è

$$\int_2^{+\infty} \frac{6x^{2a}}{(x-1)^2(x^2+x^a+1)} dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \log 7 + 2 - \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{5}{\sqrt{3}}.$$

Università degli Studi di Padova
sede di Vicenza
Esame di Matematica A, di Matematica 1 e di Analisi 1 del 5 settembre 2005

GIUSTIFICARE TUTTE LE RISPOSTE

(1) Si consideri la funzione

$$f(x) = 1 - \sin x \log \left| \frac{\sin x}{e} \right|$$

(a) Determinare il dominio, eventuali periodicità e simmetrie e studiare il segno di f . Calcolare i limiti agli estremi del dominio di f. (Sugg. Studiare f nel più piccolo intervallo possibile..)

(b) Calcolare f' e determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f. Determinare eventuali attacchi di f'.

(c) Disegnare un grafico qualitativo di f (in tutto $\mathbf{R}$). Non è richiesto lo studio di f''.

Soluzione:(a) Il dominio di f è $D = \mathbf{R} \setminus \{\sin x \neq 0\} = \mathbf{R} \setminus \{x \in \mathbf{R} : \; x = k\pi, \; k \in \mathbf{N}\}$. La funzione è 2π–periodica e $f(x) - 1$ è dispari, quindi basta studiarla nell'intervallo $D \cap [0, \pi] =]0, \pi[$. $\forall x \in]0, \pi[$ la funzione $\sin x > 0$, quindi $f(x) = 1 - \sin x \log \left[\frac{\sin x}{e}\right]$ e poichè $0 < \frac{\sin x}{e} \leq \frac{1}{e}$, si ha che $\log \left[\frac{\sin x}{e}\right] \leq \log \left[\frac{1}{e}\right] = -1$ per cui $\sin x \log \left[\frac{\sin x}{e}\right] > 0$ e $f(x) > 1 > 0 \;\; \forall x \in]0, \pi[$.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to \pi^-} f(x) = 1,$$

e f si estende per continuità a tutto $\mathbf{R}$.
(b) $\forall x \in]0, \pi[$ la funzione $\sin x > 0$, quindi $f(x) = 1 - \sin x \log \left[\frac{\sin x}{e}\right]$ e

$$f'(x) = -\cos x \left[\log \left[\frac{\sin x}{e}\right] + \sin x \frac{e}{\sin x} \frac{1}{e}\right] = -\cos x \left[\log \left[\frac{\sin x}{e}\right] + 1\right].$$

Per quanto già osservato, $\log \left[\frac{\sin x}{e}\right] \leq -1$, dunque

$$\log \left[\frac{\sin x}{e}\right] + 1 \leq 0 \qquad \forall x \in]0, \pi[$$

e $f'(x) \geq 0$ se e solo se $\cos x \geq 0$, cioè $x \in]0, \pi/2]$. Perciò f è monotona crescente in $]0, \pi/2]$ e decrescente in $]\pi/2, \pi[$ e assume un massimo relativo in $x = \pi/2$. Per la periodicità e le simmetrie di f, per $k \in \mathbf{Z}$ i punti $\pi/2 + 2k\pi$ sono di massimo assoluto, mentre i punti $-\pi/2 + 2k\pi$ sono di minimo assoluto. Gli attacchi di f' in 0^+ e in π^- sono

$$\lim_{x \to 0^+} = +\infty, \qquad \lim_{x \to \pi^-} f'(x) = -\infty,$$

quindi nei punti $k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$ f non è derivabile e ha tangente verticale.

(2) Calcolare al variare del parametro $a > 0$ il seguente limite:

$$L = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^a + ex^3 \left(1 - e^{1/x}\right)}{x \sin x - ex^3 \sin(1/x)}.$$

Soluzione: Poichè $1 - e^{1/x}$ è asintotica a $-1/x$, in breve, $1 - e^{1/x} \sim -1/x$, per $x \to +\infty$, il numeratore soddisfa

$$x^a + ex^3 \left(1 - e^{1/x}\right) \sim x^a - ex^2 \sim \begin{cases} -ex^2 & se \quad a < 2 \\ (1-e)x^2 & se \quad a = 2 \\ x^a & se \quad a > 2 \end{cases}$$

mentre $x \sin x = o(x^2)$ e $-ex^3 \sin(1/x) \sim -ex^2$, per cui

$$x \sin x - ex^3 \sin(1/x) \sim -ex^2.$$

Il limite richiesto vale allora

$$L = \begin{cases} 1 & se \quad a < 2 \\ \frac{(1-e)}{-e} & se \quad a = 2 \\ -\infty & se \quad a > 2. \end{cases}$$

(3) Calcolare l'integrale

$$I = \int_0^{\sqrt{2}} \arccos\left|x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right| \, dx.$$

Soluzione: Il dominio della funzione integranda è

$$D = \left\{ x \in \mathbf{R} : \ \left|x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right| \leq 1 \right\} = \left\{ x \in \mathbf{R} : \ \frac{1}{\sqrt{2}} - 1 \leq x \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right\},$$

e quindi $D \subset [0, \sqrt{2}]$. Inoltre, dalla definizione di modulo si ha

$$\int_0^{\sqrt{2}} \arccos\left|x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right| \, dx = \int_0^{\sqrt{2}/2} \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - x\right) \, dx + \int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{2}} \arccos\left(x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \, dx.$$

Operando le sostituzioni $y = \frac{1}{\sqrt{2}} - x$ e $y = x - \frac{1}{\sqrt{2}}$ rispettivamente nel primo e nel secondo integrale, si ottiene

$$I = 2\int_0^{\sqrt{2}/2} \arccos y \, dy = 2\left(y \arccos y \Big|_0^{\sqrt{2}/2} + \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{y\, dy}{\sqrt{1-y^2}} \right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi + 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

dove la penultima uguaglianza si ha integrando per parti.

MATEMATICA A

Commissione F. Albertini, M. Motta, G. Zampieri
Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 7 gennaio 2008

TEMA 1

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{-|x(x+3)|}\,(x + |x+3|)$$

(a) Determinare il dominio di f, eventuali simmetrie, e periodicità e segno.

(b) Determinare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti di f.

(c) Studiare la continuità e la derivabilità di f; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f. I limiti di f', se significativi.

(d) Studiare la convessità e determinare gli eventuali flessi.

(e) Disegnare un grafico qualitativo di f in tutto il dominio.

Esercizio 2 Si consideri l'integrale improprio

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{+\infty} \frac{(1+x^2)^{1-a}}{\log^{3(2-a)}(3+x)\,[\arctan^2 x + |\arctan^2 x - \arctan x|]}\,dx$$

(a) Determinare i valori del parametro reale a per cui l'integrale converge.
(b) Calcolare l'integrale per $a = 2$.

Esercizio 3 Risolvere il problema di Cauchy seguente

$$\begin{cases} y' = \frac{2xy}{y^2+3} \\ y(0) = c \end{cases}$$

per i due valori $c = 2$ e $c = 0$ della condizione iniziale.

Tempo: due ore e mezza.

Università degli Studi di Padova
sede di Vicenza
Prova scritta di Matematica A
del 20 Luglio 2006
(Canale 2, Prof. F. Albertini e M. Motta)

$\boxed{\textbf{GIUSTIFICARE TUTTE LE RISPOSTE}}$

(1) Si consideri la funzione

$$f(x) = (x-1)\, e^{\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}}$$

(a) Determinare il dominio, il segno ed eventuali simmetrie di f.

(b) Determinare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti verticali.

(c) Studiare la continuità e la derivabilità di f; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f.

(d) (Fac.) Determinare eventuali asintoti obliqui di f.

(e) Disegnare un grafico qualitativo di f. (Non è richiesto lo studio di f'')

(2) Determinare le radici del seguente polinomio:

$$P(z) = z^4 + (2i+1)z^2 + 2i.$$

(3) Data la funzione integrale

$$F(x) = \int_0^x \left[\log(1+t^2) - \arctan(t^a)\right]\, dt,$$

(a) calcolare al variare del parametro $a > 0$ il limite seguente

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{F(x)}{x^3}.$$

(b) Calcolare il valore $F(1)$ per $a = 1$.

Università degli Studi di Padova
sede di Vicenza
Prova scritta di Matematica A
del 19 Settembre 2006
(Canale 2, Prof. F. Albertini e M. Motta)

GIUSTIFICARE TUTTE LE RISPOSTE

(1) Si consideri la funzione

$$f(x) = \arctan\left(\frac{x+1}{x-1} + \log(x^2)\right).$$

(a) Determinare il dominio di f, il segno di f ed eventuali simmetrie.

(b) Determinare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti di f.

(c) Studiare la continuità e la derivabilità di f; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f.

(d) Calcolare i limiti di f', se significativi.

(e) Disegnare un grafico qualitativo di f. (Non è richiesto lo studio di f'')

(2) Per ogni valore di $\alpha \in \mathbf{R}$, determinare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2^x - \sin(\alpha x) - 1 + x^3 \sin\frac{1}{x}}{1 - \cos(\sqrt{x}) - \frac{1}{2}\log(x+1)}.$$

(3) Determinare il carattere della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n^4+2n} - n^2}{\sqrt{n}} \sin(\sqrt{n}).$$

MATEMATICA A

Canali, 1 e 2, Commissione F. Albertini, M. Motta

Ingegneria Gestionale, Meccanica, Meccatronica, Vicenza

Vicenza, 10 luglio 2008

Esercizio 1 Si consideri la funzione

$$f(x) = \log\left(2e^x + 3e^{-x} + |x| - 5\right).$$

(a) Preliminarmente, studiare brevemente la funzione

$$g(x) = 2e^x + 3e^{-x} + |x| - 5.$$

(b) Determinare il dominio di f, eventuali simmetrie, e periodicità di f. Non è richiesto lo studio del segno di f.

(c) Determinare i limiti agli estremi del dominio ed eventuali asintoti di f.

(d) Studiare la continuità e la derivabilità di f; determinare gli intervalli di monotonia e gli eventuali punti di estremo (massimo e minimo) relativo e assoluto di f. Non è richiesto lo studio della convessità di f.

(e) Disegnare un grafico qualitativo di f.

Esercizio 2 Determinare e disegnare nel piano di Gauss l'insieme $A \subseteq \mathbb{C}$ di tutti i numeri complessi che soddisfano la seguente disequazione:

$$\left| \frac{|\sqrt{2}\bar{z}| + 2iRe(z)}{z - \bar{z}} \right| \geq 1.$$

Esercizio 3 Si consideri, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, la seguente equazione differenziale:

$$y'' + y' - 2y = \alpha e^{-2x} + \sin(x).$$

(a) Determinarne la soluzione per ogni valore del parametro reale α.

(b) Dire se esistono dei valori del parametro α che danno luogo a qualche soluzione periodica e specificare tali soluzioni.

(c) Dire se esistono dei valori del parametro α che danno luogo a qualche soluzione $y(x)$ tale che $\lim_{x\to-\infty} y(x) = +\infty$ e specificare tali soluzioni.

Tempo: due ore e mezza. Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato. Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato. È vietato tenere libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo. È permesso usare solo un foglio A4 personale.